

授業中の計算課題について (泉浦、2011-02-21)

授業中の計算課題の一つとして、波長 $x = 50, 150, 300, 600, 1800, 5400$ (nm) のところでの温度 3000, 6000, 1200K の黒体放射の式の値を求め、グラフに描くことを試みました。

このうち、温度 1200K の黒体放射では、短波長側で式の値がとても小さくなり、電卓では計算が困難だという指摘が、計算に当たった複数の学生からありました。電卓の取り扱える桁数が比較的少ないので、その指摘は正しいものでした。そういう場合の計算の進め方の一例を、以下に順を追って示します。学生の皆さんも、自分で確認してください。

定数の定義：

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s (プランク定数)}$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \text{ (ボルツマン定数)}$$

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \text{ (光速)}$$

変数の定義：

$$\lambda (\text{波長}) = x \times 10^{-9} \text{ (m)}$$

$$T (\text{温度}) (\text{K})$$

黒体放射の式：

$$BB_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}$$

計算：

問題点は指数 $\frac{hc}{kT\lambda}$ ($\equiv A$ と定義) の部分が、普通の電卓では扱えない 10^{100} 以上の数の場合があること。 $T = 1200\text{K}$ では、 $A = 1.2011 \times 10^4/x$ である。
 $x = 50, 150, 300, 600, 1800, 5400$ (nm) に対しては、
 $A = 240.22, 80.073, 40.037, 20.018, 6.673, 2.2243$ である。

一方、 $\frac{2hc^2}{\lambda^5}$ ($\equiv B$ と定義) $= 1.1934 \times 10^{29}/x$ については、
 $x = 50, 150, 300, 600, 1800, 5400$ (nm) に対して、
 $B = 3.82 \times 10^{20}, 1.57 \times 10^{18}, 4.91 \times 10^{16}, 1.54 \times 10^{15}, 6.32 \times 10^{12}, 2.60 \times 10^{10}$.

ここで、 $e^{\frac{hc}{kT\lambda}} = 10^{\log_{10} e^{\frac{hc}{kT\lambda}}}$ ($e = 10^{\log_{10} e}$) だから、 $BB_{\lambda}(T) = \frac{B}{10^{A \log_{10} e - 1}}$.

そして、 $\log_{10} e = 0.43429$ だから、

$x = 50, 150, 300, 600, 1800, 5400$ (nm) に対して、

$A \log_{10} e = 104.33, 34.775, 17.388, 8.694, 2.898, 0.9660$ となる。

従って、

$$BB_{50nm}(1200K) = 3.82 \times 10^{11} / (10^{104.33} - 1) \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ nm}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$
$$\doteq 3.82 \times 10^{11-104.33} = 3.82 \times 10^{-93.33}$$

$$BB_{150nm}(1200K) = 1.57 \times 10^9 / (10^{34.775} - 1) \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ nm}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

$$BB_{300nm}(1200K) = 4.91 \times 10^7 / (10^{17.388} - 1) \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ nm}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

$$BB_{600nm}(1200K) = 1.54 \times 10^6 / (10^{8.694} - 1) \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ nm}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

$$BB_{1800nm}(1200K) = 6.32 \times 10^3 / (10^{2.898} - 1) \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ nm}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

$$BB_{5400nm}(1200K) = 2.60 \times 10^1 / (10^{0.9660} - 1) \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ nm}^{-1} \text{ sr}^{-1}.$$

これで、温度 1200K の黒体放射の式の値を波長 50, 150, 300, 600, 1800, 5400 (nm) のいずれに対しても精度良く求めることができた。

以上。