

CIP法を用いた 爆発の数値シミュレーション

岡山大学 理学部 地球科学科
05424514 澤井 健太

2016/02/12

要旨

惑星の表層では、火山噴火による爆発や小天体の衝突など、様々な爆発現象が生じている。大規模な爆発現象は惑星表層環境に全球規模で長期間の変化をもたらす。例えば中生代末にユカタン半島に衝突した小天体による爆発は、恐竜を絶滅させて中生代を終わらせるほどの影響を惑星表層環境に及ぼしたと考えられている。

本研究では、爆発現象の数値シミュレーションを行うことを目的に2次元の非粘性圧縮性流体の計算コードを作成し、成層した大気中における爆発現象の数値シミュレーションを行った。

爆発のエネルギーを変えて幾つかのシミュレーションを行ったところ、爆発のエネルギーが大きいほど爆発で生じるプリュームは早く上昇するといく結果が得られた。また、爆発によって生じた高温の空気塊が上昇し、それが作る風の流れの構造がいわゆるキノコ雲に見えることが確認された。

目次

第1章 序論	3
1.1 研究背景	3
1.2 研究目的	3
第2章 計算方法	4
2.1 CIP法	4
2.2 基礎方程式	7
2.3 計算方法	7
2.4 コードのテスト	8
第3章 成層大気中の爆発	11
3.1 計算の設定	11
3.1.1 初期条件	11
第4章 計算結果と考察	13
4.1 計算結果	13
4.2 考察	15

爆発の数値シミュレーション	3
第5章 まとめ	16
謝辞	17
参考文献	17
図録	19

第1章 序論

1.1 研究背景

惑星の表層では、火山噴火による爆発や小天体の衝突など、様々な爆発現象が生じている。比較的に小さな爆発はその周囲に局所的な影響をおよぼすだけであるが、大きな規模の爆発は全球規模で長期間に渡る表層環境の変化をもたらす。例えば、1991年に起こったピナツボ火山の噴火は20世紀最大規模の噴火であったが、噴火によって巻き上げられた物質によって、地球の気温は0.5度程度低下した。また、中世代末にユカタン半島に衝突した小天体による爆発は、恐竜を絶滅させて中生代を終わらせるほどの影響を惑星表層環境に及ぼしたと考えられている。また、さらに大きな規模の爆発においては、爆発によって生じる衝撃波が周囲にある大気を加速することで、大気を惑星の重力圏外に吹き飛ばし、惑星大気の組成や量を変える可能性もあると考えられている。

1.2 研究目的

以上のように惑星表層での爆発現象は地表環境に大きな影響を持っているので、爆発が起きたときに、大気がどのような挙動をするかを知ることが重要である。

そこで、本研究では爆発現象の数値シミュレーションを行うことを目的に、2次元の流体計算コードを作成し、成層した大気における爆発現象の数値シミュレーションを行った。

第2章 計算方法

2.1 CIP 法

多くの爆発現象には衝撃波が伴い，衝撃波の付近では圧力，密度が不連続に変化する．この不連続な変化を精度よく計算するために本研究ではCIP法と呼ばれる方法で計算を行った．

CIP法は矢部孝らによって提案された移流方程式の計算方法である [1]．移流方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

と表される方程式である．移流速度 u が空間・時間的に変化し， Δt が十分に小さいとき，(2.1) 式の解は

$$f(x, t) \simeq f(x - u\Delta t, t - \Delta t) \quad (2.2)$$

となる．これは現在のプロファイルが， Δt だけ前の時刻でのプロファイルを形を変えずに $u\Delta t$ だけ移動したものであることを示している．

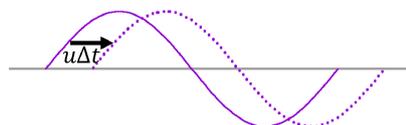


図 2.1: 移流方程式の概念図．速度が一定の場合，プロファイルが変わらずに波が伝わる．

実際に数値計算をするときには、格子点 x_i の上での値 $f(x_i)$ のみ記憶されている。 $x_i - u\Delta t$ は格子点であることはまずないので、 $f(x_i - u\Delta t)$ の値を格子点上の値を使い補間する必要がある。ここで、 $x_i - u\Delta t$ は $u > 0$ のとき x_i と x_{i-1} の間にあり、 $u < 0$ のとき x_i と x_{i+1} の間にあるとする。

3次多項式のスプライン補間を使うと、 $u > 0$ のとき、 x_i と x_{i-1} の間の点 X を補間する関数 F_i は

$$F_i(X) = a_i(X - x_i)^3 + b_i(X - x_i)^2 + f'_i(X - x_i) + f_i \quad (2.3)$$

となる。スプライン補間では a_i, b_i, f'_i の3つの値を決めることで、グリッド間を補間するが、この計算は行列方程式を計算する必要があり、計算方法が複雑になる。そこで、CIP法では f'_i を(2.1)式を速度 u を一定とし、空間微分したもの

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + u \frac{\partial f'}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

を使い求めることを考える。この式は(2.1)式と同じ形なので、(2.2)式の関係を使うことができる。すべてのグリッド上で f と f' が(2.2)式と(2.4)式によって与えられるとすると、(2.3)式の変数は a_i と b_i の2つになる。

a_i と b_i を求めるために、 $F_i(x)$ と $F_{i-1}(x)$ が x_{i-1} で連続、 $\partial_x F_i(x)$ と $\partial_x F_{i-1}(x)$ が x_{i-1} で連続であるという条件を使う。この条件を使い計算すると

$$a_i = \frac{f'_i + f'_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{2(f_i - f_{i-1})}{\Delta x^3} \quad (2.5)$$

$$b_i = \frac{3(f_{i-1} - f_i)}{\Delta x^2} + \frac{2f'_i + f'_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.6)$$

が得られる。ここで $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ である。求めた a_i, b_i を使うことで、時刻 $t - \Delta t$ での f と f' の値を使い時刻 t での f_t と $f'(t)$ を以下の式を使い計算することができる。

$$\begin{aligned} f_i(t) &= F(x_i - u\Delta t) \\ &= a_i(-u\Delta t)^3 + b_i(-u\Delta t)^2 + f'_i(-u\Delta t) + f_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} f'_i(t) &= \partial_x F(x_i - u\Delta t) \\ &= 3a_i(-u\Delta t)^2 + 2b_i(-u\Delta t) + f'_i(-u\Delta t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここまでの計算は $u > 0$ で計算を行ったが、 $u < 0$ のときは、 Δx を $-\Delta x$ 、 $i - 1$ を $i + 1$ に置き換えることで計算することができる。

図 2.2 は CIP 法を使い矩形波の移流計算を行った例である。値が急激に変化する部分でオーバーシュートが起きているが、これが時間的に増大することはない。参考までに風上差分法を使った移流計算の結果を示してあるが、風上差分法では数値拡散によってプロファイルが潰れていることがわかる。

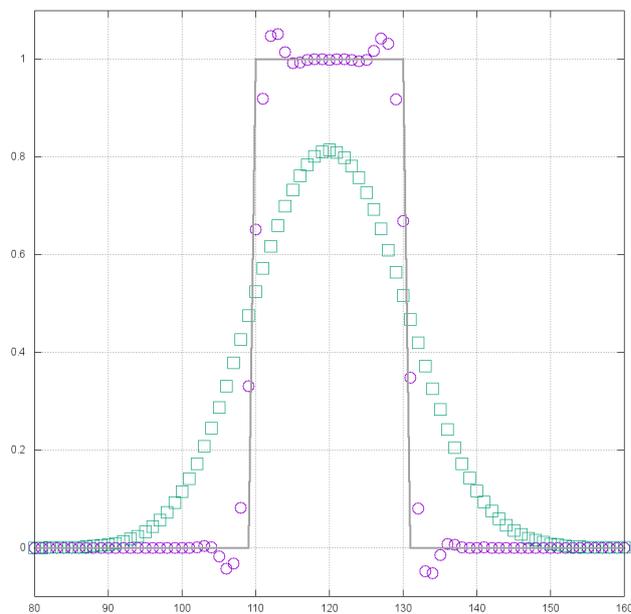


図 2.2: 矩形波の移流方程式の計算結果．紫点は CIP 法による計算結果．緑点は風上差分法による計算結果．黒線は厳密解

2.2 基礎方程式

本研究では，基礎方程式として，以下の非粘性圧縮性流体の連続の式，運動方程式，エネルギー方程式を用いた．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P = -\gamma P (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.11)$$

ここで， ρ は密度， $\mathbf{u} = (u, w)$ は速度， P は圧力， \mathbf{g} は重力加速度ベクトル， γ は比熱比 (C_p/C_v) である．(2.9)~(2.11) 式は

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\rho, u, w, P) \\ \mathbf{G} &= (-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g, -\gamma P (\nabla \cdot \mathbf{u})) \end{aligned}$$

を用いると

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + w \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \mathbf{G} \quad (2.12)$$

と書くことができる．したがって，数値シミュレーションはこの形の式を計算すれば良いことになる．

2.3 計算方法

本研究では (2.12) 式を移流と非移流に分離して計算する Semi - Lagrange 法を使い計算を行った．移流は

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + w \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

と記述され，前述の CIP 法を 2次元に拡張したのを使い計算を行った．非移流は

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \mathbf{G} \quad (2.14)$$

と記述され，差分法を使い計算を行った．また，計算にはスタッガード格子を使った．

本研究では数値振動を抑えるため，圧力に人工粘性を加えた．人工粘性は以下に示す Von - Neumann 型の人工粘性を使った．

$$q_i = \begin{cases} \alpha(-\rho_i C_s \Delta u + \frac{\gamma+1}{2} \rho_i \Delta u^2) & (\Delta u < 0) \\ 0 & (\Delta u \geq 0) \end{cases} \quad (2.15)$$

ここで, $C_s = \sqrt{\gamma p_i / \rho_i}$ は音速, α は人工粘性係数である.

2.4 コードのテスト

作成したコードをテストするために1次元衝撃波管問題を計算した. 1次元衝撃波管問題は図2.3のように, 仕切りを挟んで, 高圧の流体と低圧の流体を入れ, 仕切りを取り去ったと後の流体の状態を求める問題である. この問題には解析解が存在するため, 計算コードのテストによく使用される.

図2.4と図2.5に $t = 0$ (初期状態) と $t = 0.3$ での流体の密度, 圧力を作成したコードで計算したものを示す. 密度, 圧力のすべてが急激に変化している場所は衝撃波面, 圧力が一定で, 密度のみ急激に変化している場所は接触不連続面, 左側に伝わっていく圧力, 密度が減少する波は膨張波と呼ばれる. 図2.4は $t = 0.3$ での密度の解析解と本研究で作成したコードの計算結果を重ねて描いたものである. 本研究で作成したコードで衝撃波, 接触不連続面, 膨張波が正しく計算できていることが確認できた.

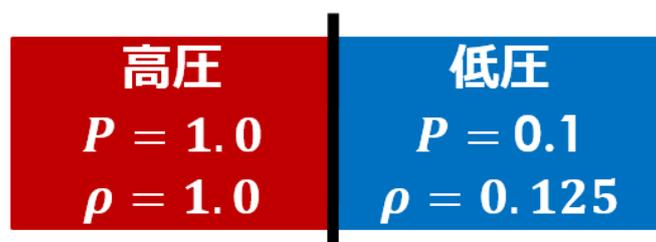


図 2.3: 衝撃波管問題の概念図と初期条件. 初期状態で流体は静止している.

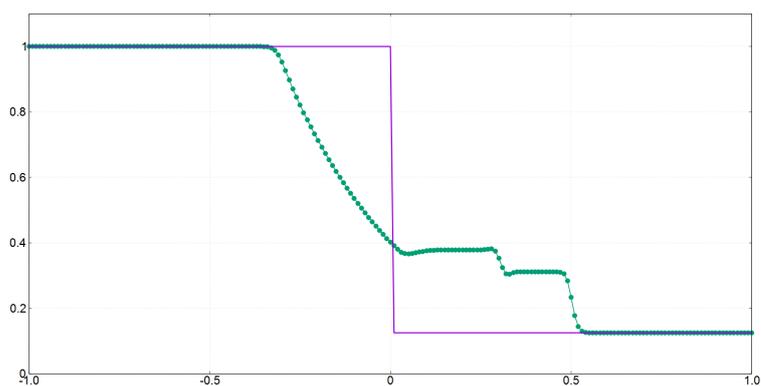


図 2.4: $t = 0$ (紫線) と $t = 0.3$ (緑線) での密度の計算結果 .

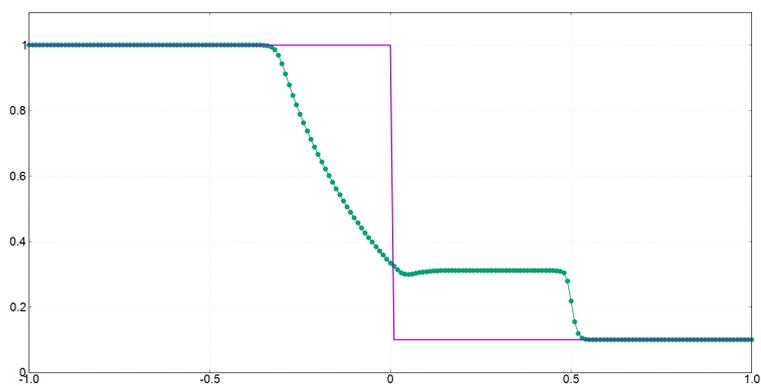


図 2.5: $t = 0$ (紫線) と $t = 0.3$ (緑線) での圧力の計算結果 .

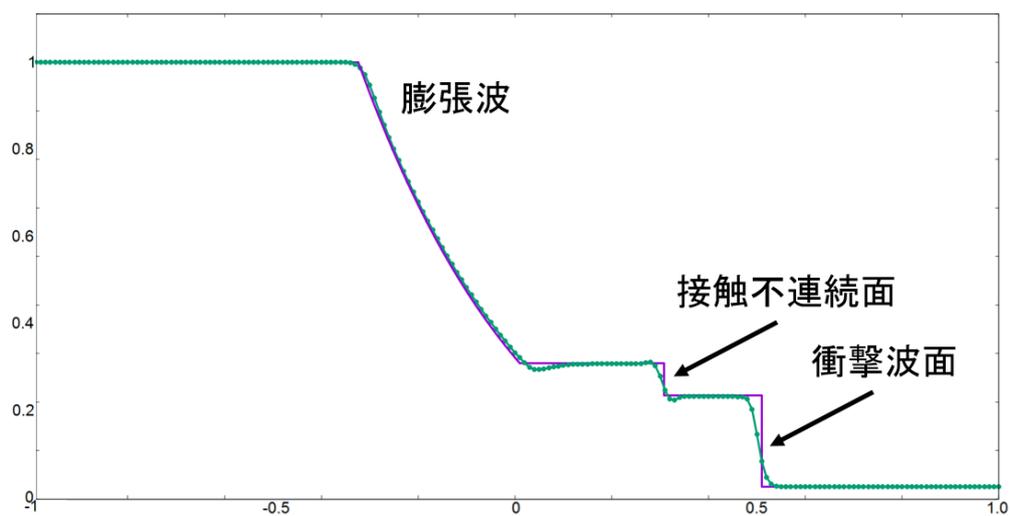


図 2.6: $t = 0.3$ での密度の計算結果 (緑線) と解析解 (紫線) の比較.

第3章 成層大気中の爆発

3.1 計算の設定

本研究で用いた計算領域を図 3.1 に示す。計算は水平 30km，鉛直 30km の領域で行った。また，空間分解能は $\Delta x = \Delta z = 100\text{m}$ ，時間刻みは $\Delta t = 0.01\text{s}$ とした。軸対称な爆発のみを扱うことにし，計算領域の左下に爆源をおき，対称軸となる左端の境界は固体壁とした。また，地面である下端も固体壁とした。上下左右すべての境界は free - slip 条件とした。この境界条件は壁と垂直な方向の流れはなく，壁と平行な向きの流れは壁の影響を受けることなく自由に流れるものである。また境界での反射の影響を抑えるため，右端と上端には擾乱を減衰させるスポンジ領域を設けた。スポンジ領域は人工粘性係数 α を大きくすることで，設定した。急激に人工粘性係数を大きくすると，そこで反射が起きてしまうので，それを避けるために，人工粘性係数を徐々に大きくした。

3.1.1 初期条件

初期における大気は静止しているものとした。鉛直の温度減率は現在の地球を模し，下層 10km を $6\text{K}/\text{km}$ ，その上は等温とした。また，圧力と密度は静力学平衡が成り立つように状態方程式を使い与えた。 $t = 0$ において，左下の最下層の 8 グリッドに爆発規模に応じたエネルギーを加え，時間発展を計算した。エネルギーを 8 グリッドに分けて与えたのは，一つのグリッドに大きなエネルギーを与えると，爆発後すぐに CFL 条件を超える流れが生じ，計算ができなくなるからである。



図 3.1: 計算領域

第4章 計算結果と考察

4.1 計算結果

現在の地球大気を模した成層大気，で4通りの爆発エネルギーで計算を行った．各エネルギーでの計算結果は図録に載せている．

図4.1は爆発のエネルギーが 5×10^{12} Jで，爆源から150s後と300s後について初期状態との温度差(温度偏差)と風速ベクトルを示したものである．この図は高度0～15km，爆発からの水平距離0～10kmの範囲を拡大し，表示している．この2つの図から以下のことがわかる．

- 爆発によって生じた高温の空気塊は成層大気中を上昇する．
- 高温の空気塊が上昇する周辺で風が渦を巻いている構造が見られる．

図4.2は各エネルギーでの爆源の真上5kmでの温度偏差の時間変化を描いたものである．爆発の十数秒後にみえる温度の変化は衝撃波によるものである．また，爆発によって生じた高温の空気塊が上昇し，急激に温度が変化することがわかる．急激な温度上昇の前に一度温度が下がっているが，これは不連続面に生じた人工的なものと考えられる(4.2節)．

高温の空気が5kmまで上昇するまでの時間と爆発のエネルギーの関係を描いたものが図4.3である．爆発のエネルギーが大きいほど上昇にかかる時間が短いことがわかる．

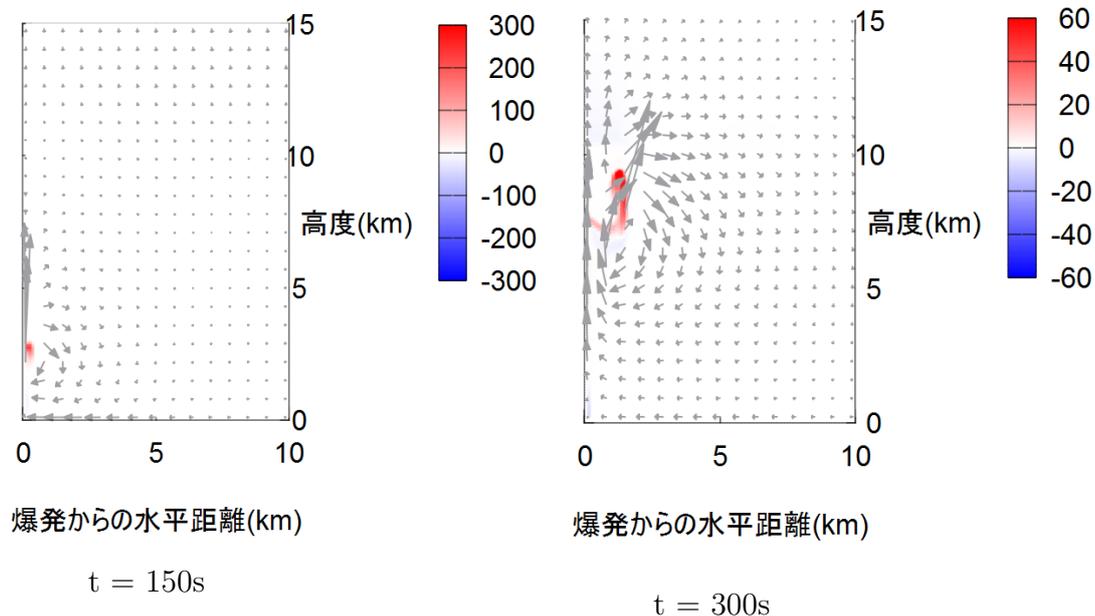


図 4.1: 爆発のシミュレーション結果 . 温度偏差と風速ベクトルを表示している . 温度偏差のカラーバーの範囲は図ごとに調整している .

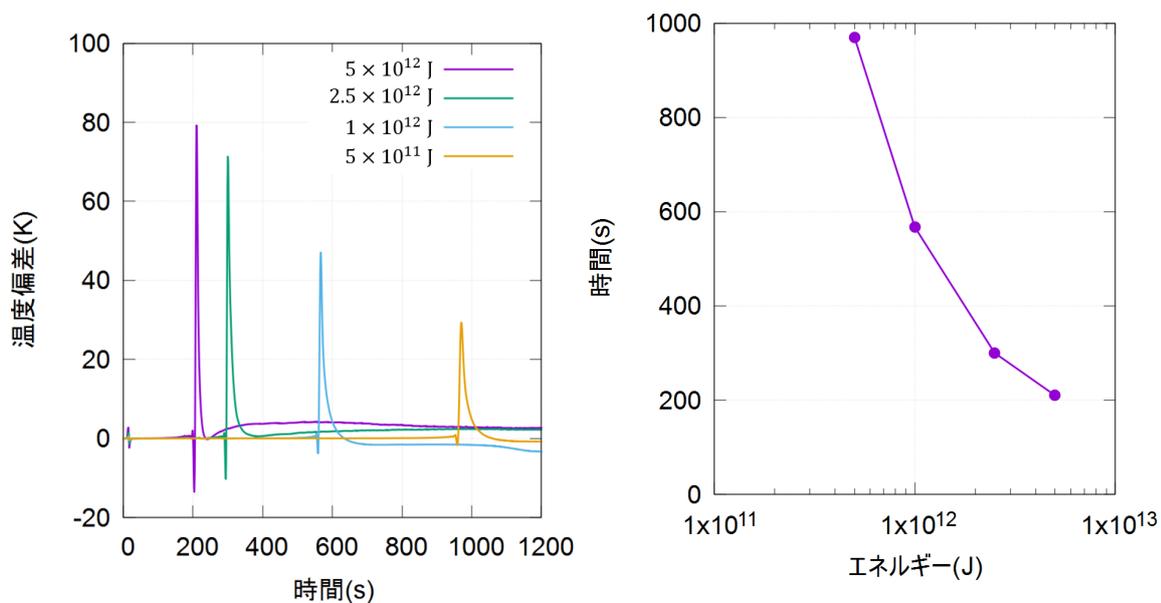


図 4.2: 爆発の真上 5km での温度偏差の時間変化 .

図 4.3: 爆発のエネルギーと高温部の真上 5km への到達時間 .

4.2 考察

爆発によって生じた高温の空気塊が成層大気中の上昇するのは、空気塊の密度が周囲の大気よりも低く、浮力が生じるからである。空気塊は周囲との密度差、つまり温度差が0になる高度まで上昇する。それ以上の高度では周囲の大気のほうが温度が高く、浮力は下向きに働くので、上昇できない。実際には浮力が0になるとき、空気塊は上向きの速度を持っているので、すぐに上昇が止まることはなく、浮力が下向きに働く場所でもしばらく上昇する。浮力が下向きに働く場所で上昇する空気塊の速度が0になると、空気塊は下向きに進み始め、下降流が生じると考えられ、これは計算結果にも現れている。浮力は密度差が大きい、つまり温度差が大きいほど強く働くので、爆発のエネルギーが大きいほど、早く上昇することを説明できる。

高温の空気塊が上昇するときに周囲に風の渦ができる様子が見られた(図4.1)。風の渦の上昇流の部分は、高温の空気塊が上昇し、もともと空気塊があった場所へ風が吹き込むことで生じている。風の渦の下降流の部分は、上昇する空気塊の上にある大気が横に押し出された後、それが空気塊の下の部分に吸い込まれる事によって生じている。この渦がいわゆるキノコ雲の傘の部分となる。

図4.2で急激な温度の上昇が起きる前に温度が下がるのはオーバーシュートを起こしているからと考えられる。

第5章 まとめ

爆発の数値シミュレーションをするために、2次元の流体コードを作成し、成層大気中で爆発の計算を行った。計算には Semi - Lagrange 法を使い、移流計算には CIP 法、非移流計算には差分法を使った。作成し流体コードは衝撃波管問題を使いテストした。

成層大気中の爆発について数値シミュレーションを行い、キノコ雲のような構造が生成することを確認した。

今回、2次元直交座標系で計算を行ったが、その影響については考えていない。より、現実的な条件で計算を行うためには、円筒座標系で計算を行う必要がある。また、計算できた最大の爆発のエネルギーは広島型原爆のおよそ 1/10 で、地球表層環境に影響をあたえるような大規模な爆発ではなかった。

謝辞

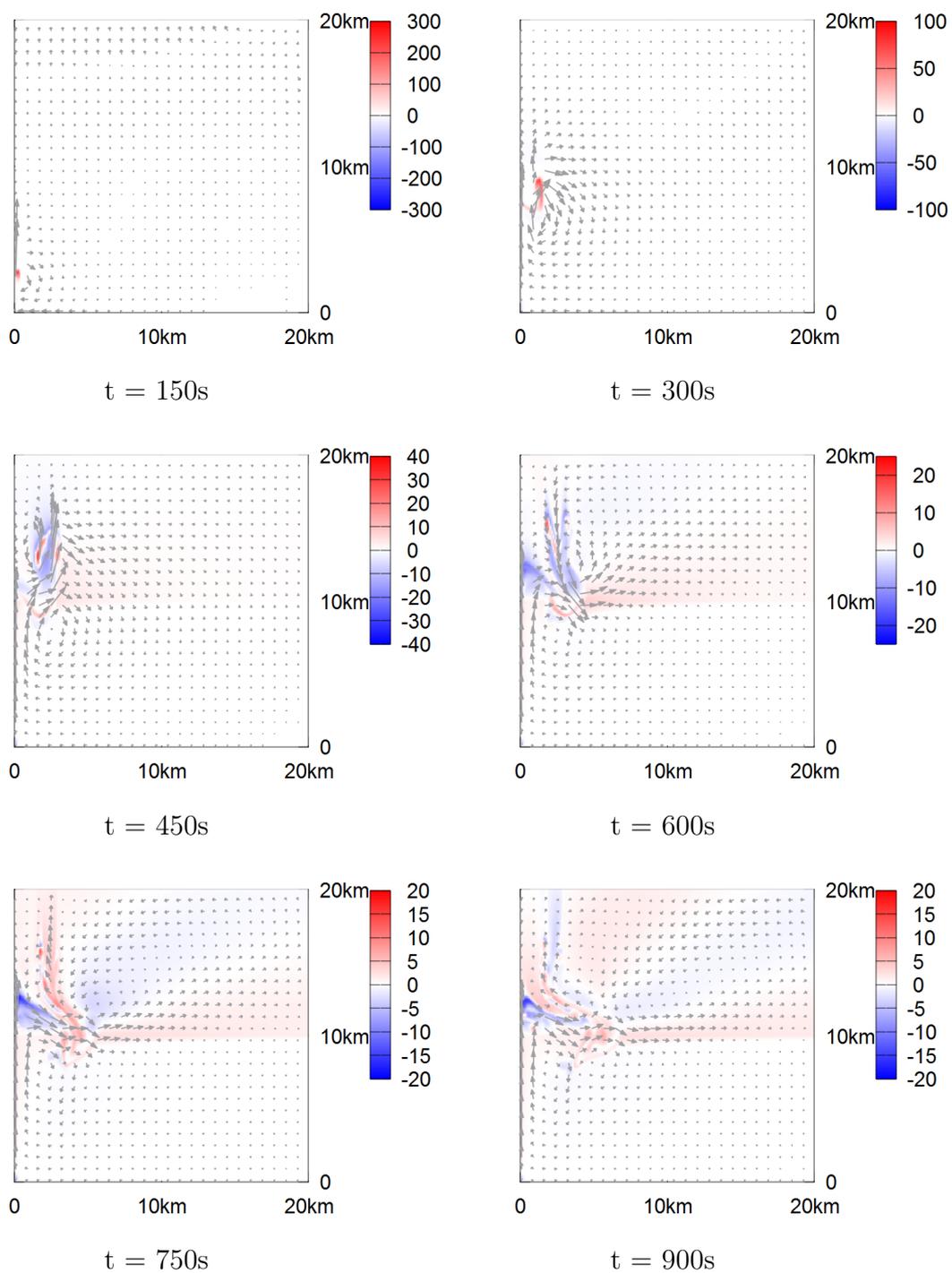
本研究を行うにあたり，ご指導いただきました指導教員である はしもと じょーじ 准教授に心より感謝いたします．また，日常の議論を通じて多くの知識や示唆を頂きました同研究室の先輩方や同期の皆様にも感謝いたします．

参考文献

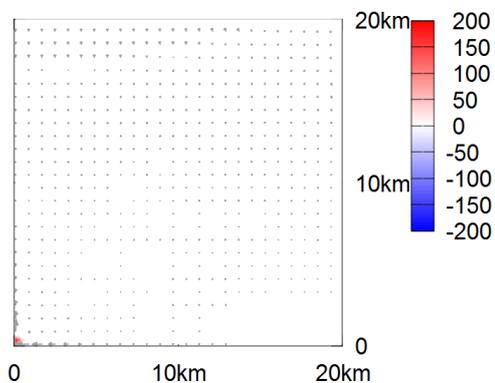
- [1] 矢部孝ほか (2003) 「CIP 法」, 森北出版, pp.222.
- [2] Yabe and Aoki(1991) Comput. Phys. Commun. 66, 219 - 232
- [3] 山下和之「衝撃波管」,
<http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/netlab/cans/cans1d/frame.html>
(2016.2.9 アクセス)

図録

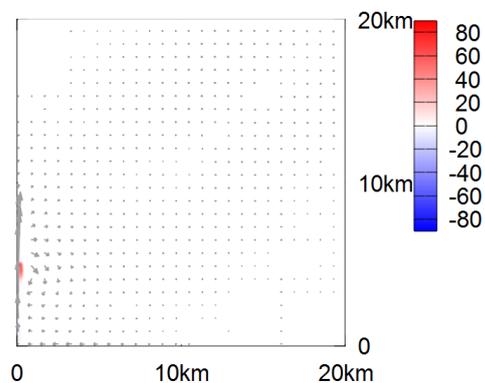
以下の図は同じ初期条件で、爆発のエネルギーのみを変えて行った計算結果である。爆発のエネルギーは $5 \times 10^{12} \text{J}$, $2.5 \times 10^{12} \text{J}$, $1 \times 10^{12} \text{J}$, $5 \times 10^{11} \text{J}$ で計算を行い、それぞれの爆発が 150s, 300s, 450s, 600s, 750s, 900s 後の温度偏差と風速ベクトルを表示している。爆発のエネルギーが $5 \times 10^{11} \text{J}$ のもののみ、爆発から 1050s, 1200s 後のものも載せている。また、温度偏差のカラーバーの範囲は図ごとに調整している。

爆発のエネルギー : $5 \times 10^{12} \text{J}$ 

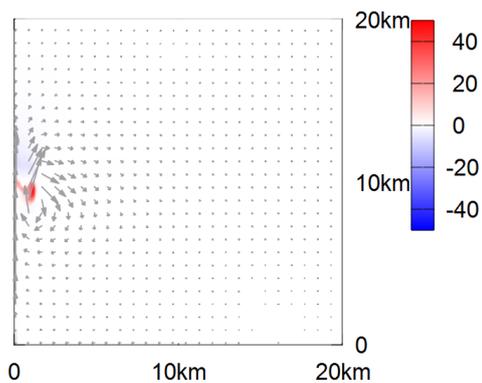
爆発のエネルギー : $2.5 \times 10^{12} \text{J}$



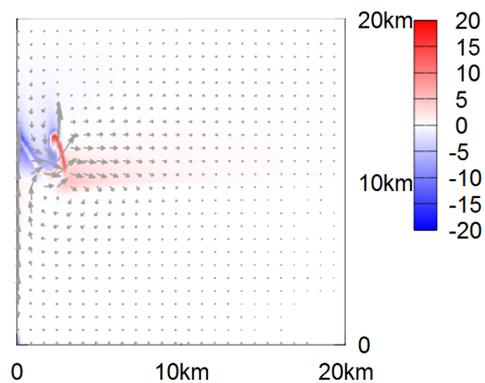
t = 150s



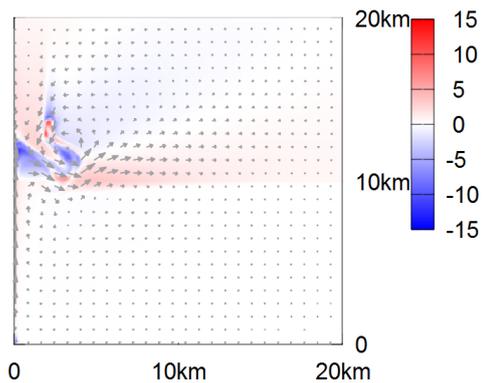
t = 300s



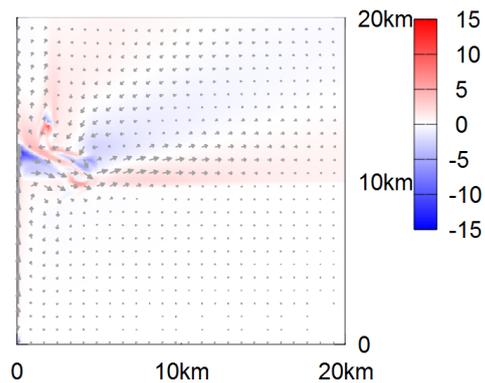
t = 450s



t = 600s

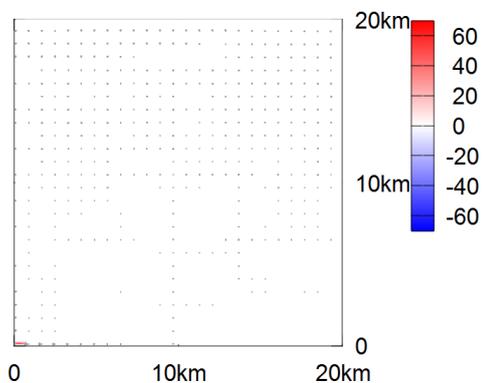


t = 750s

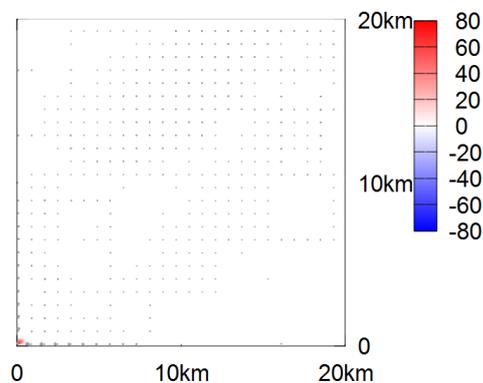


t = 900s

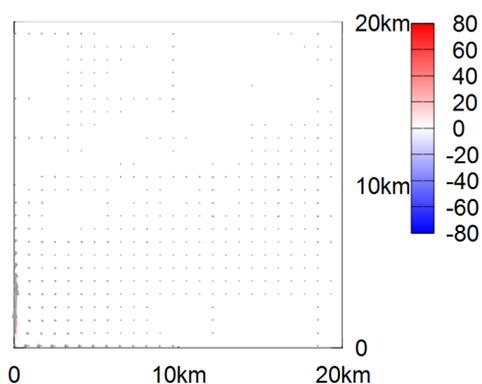
爆発のエネルギー : $1 \times 10^{12} \text{J}$



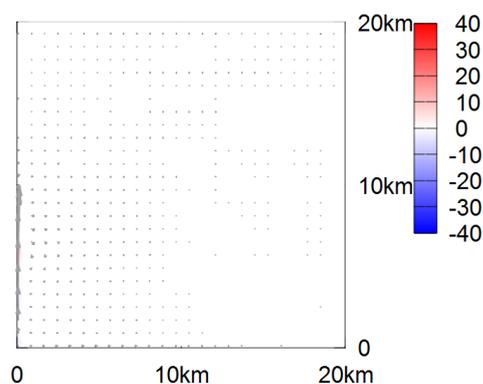
t = 150s



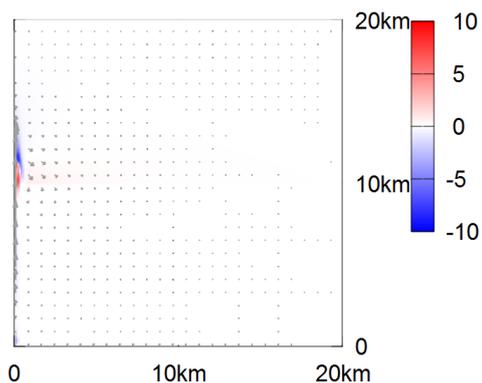
t = 300s



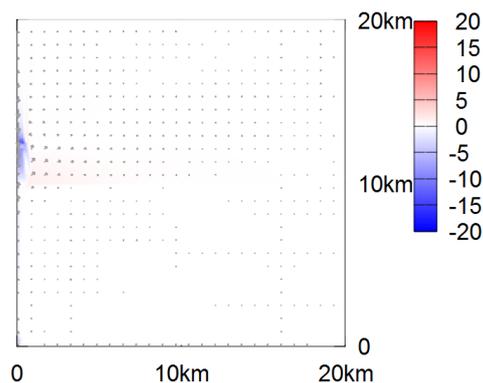
t = 450s



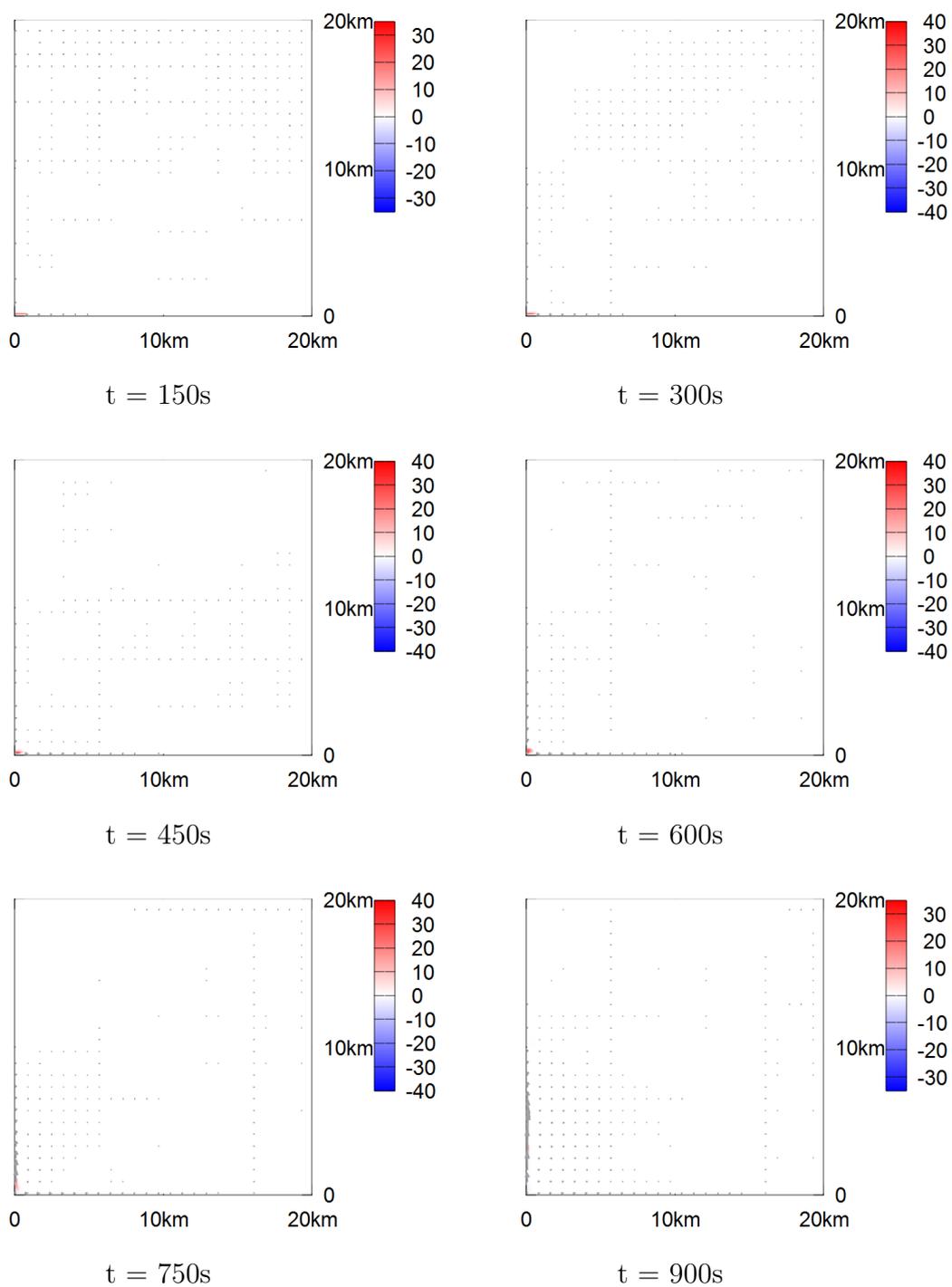
t = 600s

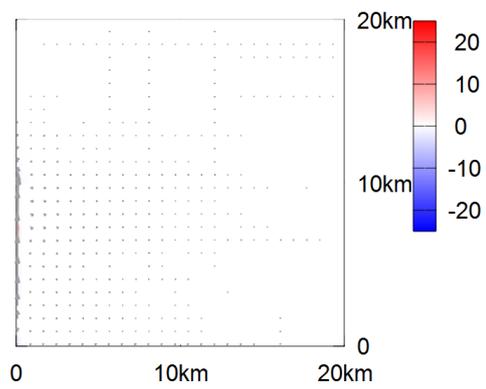


t = 750s

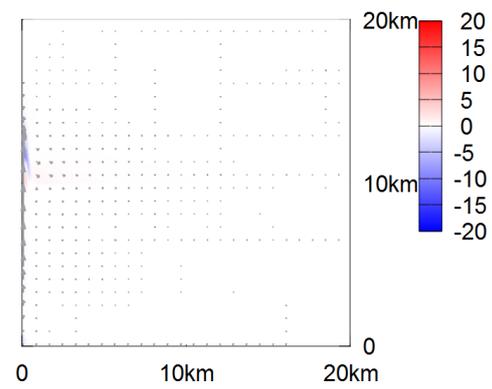


t = 900s

爆発のエネルギー : $5 \times 10^{11} \text{J}$ 



$t = 1050\text{s}$



$t = 1200\text{s}$