

冥王星-カロン系における未発見衛星 存在の可能性に関する研究

田中 篤行

岡山大学理学部 地球科学科

2014/02/14

要旨

冥王星の衛星は1978年にカロンが発見されて以来しばらく発見されなかったが、ここ10年で4個の衛星が発見された。最初に発見されたカロンは冥王星の約1/9倍の質量を持つ巨大な衛星で、冥王星-カロン系は二重準惑星とも呼べるものになっている。そして、各衛星の公転周期はカロン、ステュクス、ニクス、ケルベロス、ヒドラの順におおよそ1:3:4:5:6と整数倍になっている。これはカロンの軌道進化と、カロンと各衛星の間での軌道共鳴の結果と考えられている (Ward and Canup, 2006)。一方で、カロンと1:2になる公転周期を持つ衛星はまだ発見されていない。Youdin et al. (2012) は、連星系周りの軌道の安定性を数値計算で調べた Holman and Wiegert(1999) の結果に基づいて、冥王星-カロン系では公転周期がカロンの2.8倍より小さい軌道は不安定と考えた。しかしながら、この結果は限られた数の数値実験の結果に基づくもので、公転周期がカロンの2倍となる安定な軌道が本当に存在しないかどうかは明らかではない。

本研究では公転周期がカロンの約2倍となる安定な軌道が存在するかどうかを数値計算によって調べた。その結果、計算の範囲内において、公転周期がカロンの約2倍となるような安定な軌道が存在した。ただし、計算した期間は最大でも393年であり、より長期にわたってこれらの軌道が安定であるかどうかはこの結果だけからはわからない。しかしながら、初期条件の数を増やした今回の計算によって、公転周期がカロンの約2倍となるような衛星が存在している可能性のあることが示された。

目次

1	序論	1
1-1	冥王星とその衛星系	1
1-2	研究目的	1
2	数値計算	3
2-1	円制限三体問題	3
2-2	各種条件	4
2-3	シンプレクティック公式と対称型公式	4
2-4	ガウス・ルジャンドル法	5
2-5	コードの信頼性	6
2-6	初期値	9
2-7	軌道の安定性	10
3	結果と考察	11
3-1	結果	11
3-2	考察	12
4	まとめ	15
	謝辞	16
	参考文献	17

A	運動方程式	18
B	初期値の導出	21
B-1	初期位置	21
B-2	初速度	21
C	図録	23
C-1	M=0 度	23
C-2	M=45 度	24
C-3	M=90 度	25
C-4	M=135 度	26
C-5	M=180 度	27
C-6	M=225 度	28
C-7	M=270 度	29
C-8	M=315 度	30
D	プログラム	31

1 序論

1-1 冥王星とその衛星系

近年、観測技術の発達により多くの衛星や小惑星が発見されている。冥王星においては1978年にカロンが発見されて以来しばらく発見されなかったが、ここ10年で4個の衛星が発見された。表 1-1 は冥王星とその衛星の特徴をまとめたものである。冥王星系の特徴はまず、カロンの質量が冥王星の約 10% もあることだ。これより、冥王星とカロンは連星系のようなシステムになっている。現在までに発見されている冥王星の衛星は冥王星とカロンの共通重心のまわりを楕円軌道で公転しており、各衛星の公転周期はカロン、ステュクス、ニクス、ケルベロス、ヒドラの順におおよそ 1:3:4:5:6 と整数倍になっている。これは冥王星の衛星の起源と関係していると考えられている (Ward and Canup, 2006)。冥王星の衛星の起源はジャイアントインパクトによるものとされており、形成直後のカロンは冥王星ととても近い位置にあったが、時間が経つにつれ冥王星から離れていったと考えられている。離れていく間に周辺の衛星はカロンと軌道共鳴する軌道に捕獲された。これによって公転周期が整数比を持つような衛星系がつけられたと考えられている。

名前	質量	公転周期
冥王星	1	-
カロン	0.12	1
ステュクス	≤ 0.0004	3.16
ニクス	≤ 0.0004	3.89
ケルベロス	≤ 0.0004	5.03
ヒドラ	≤ 0.0004	5.98

表 1-1: 冥王星系. 質量は冥王星の質量で、公転周期はカロンの公転周期で規格化している。

1-2 研究目的

冥王星には2015年にアメリカ宇宙航空局が打ち上げた New Horizons という探査機が接近する。その時に未発見の衛星が存在する可能性があるかどうか、もし可能性があるならどんな軌道であるのかを知る必要がある。なぜなら探査機が衛星のような探査機より非常に大きな質量を持った物体と近接遭遇すると探査機が破壊されてしまう可能性があるからである。なので、そのようなことが起こらないよう

にするために長期的に安定な軌道を把握する. ところで, カロンと 1:2 になる公転周期を持つ衛星は現在までのところ発見されていない. Youdin et al. (2012) は, 連星系周りの軌道の安定性を数値計算で調べた Holman and Wiegert(1999) の結果に基づいて, 冥王星-カロン系では公転周期がカロンの 2.8 倍より小さい軌道は不安定と考えた. しかしながら, この結果は限られた数の数値実験に基づくもので, 公転周期がカロンの 2 倍となる安定な軌道が本当に存在しないかどうかは明らかではない.

本研究は冥王星-カロン系においてカロンの公転周期の約 2 倍の公転周期を持つ衛星が存在している可能性を検討する. そのために円制限三体問題の枠組みで衛星の運動を数値的に解き, 公転周期がカロンの約 2 倍となる安定な軌道が存在する可能性を検討した.

2 数値計算

2-1 円制限三体問題

本研究では冥王星とカロンともう一つの質点の運動を考える。これは3つの天体が万有引力のもとで運動する三体問題である。三体問題は変数の数に対して保存量の数が少ないため解析的に解くことはできない(堀,1988)。よって、これは数値的に解くしかない。数値的に解くにしても三つの天体についてそれぞれ運動方程式を解く必要がある。これは大変な労力がかかる。

冥王星系とにおいては冥王星とカロンの質量が圧倒的に大きく、その他の衛星の質量は小さい。未発見衛星の質量もまた小さいと予想される。そのため本研究では円制限三体問題で考えることにた。

円制限三体問題は3体のうち1体 P_3 の質量が他の2体 P_1, P_2 より極めて小さく、それが及ぼす万有引力を無視でき、かつ質量の大きい2体 P_1, P_2 が円運動を行なっている場合に適用することができる。冥王星-カロン系はこの場合に当てはまる。円制限三体問題は質量の小さい1体 P_3 についてのみ運動方程式を解けばよい。その運動方程式は

$$\ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2X = -\frac{\partial U}{\partial X} \quad (2-1)$$

$$\ddot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y = -\frac{\partial U}{\partial Y} \quad (2-2)$$

$$\ddot{Z} = -\frac{\partial U}{\partial Z} \quad (2-3)$$

$$U = -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{a^3}{r_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{a^3}{r_2}\right)n^2 \quad (2-4)$$

$$r_1 = \sqrt{\left(X + \frac{m_2}{m_1 + m_2}a\right)^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2-5)$$

$$r_2 = \sqrt{\left(X - \frac{m_1}{m_1 + m_2}a\right)^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2-6)$$

である。 (X, Y, Z) は P_3 の P_1 と P_2 が X 軸上に固定されるような回転座標系(図 2-1)での座標、 U は重力ポテンシャル、 m_1, m_2 は P_1, P_2 の質量、 a は P_1 と P_2 間の距離、 n は回転座標系の角速度、 r_1, r_2 は P_1, P_2 と P_3 間の距離である(この運動方程式の導出は付録)。また、円制限三体問題ではヤコビ積分という保存量が存在する。ヤコビ積分が保存されるように数値計算を行うことで精度のよい数値解を求めることができる。

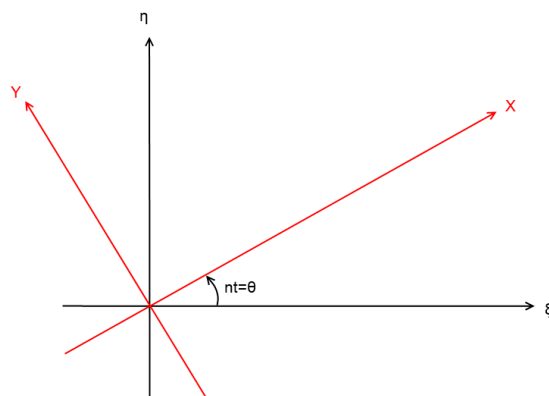


図 2-1: 回転座標系の図. 赤線が回転座標系の軸である. 図のように回転座標系では座標系が任意の角速度 ω で回転運動をしている.

2-2 各種条件

本研究では任意の速度を持った質量ゼロの粒子を任意の位置に置き, その位置の時間発展を計算した. 計算するにあたって, 計算ステップの刻み幅は回転座標系においておよそ 100 ステップで粒子が共通重心のまわりを回るような刻み幅とした. 計算ステップ数は最大 100 万ステップとした. 数値積分公式はシンプレクティック公式かつ対称型公式である 4 次のガウス・ルジャンドル法を用いた.

2-3 シンプレクティック公式と対称型公式

シンプレクティック公式と対称型公式の性質は次のとおりである (牧野,1999).

- シンプレティック公式とは数値積分公式自体が正準変換になっているような公式である.
- 対称型公式とは同じ公式を使って時間発展を逆に解いた時に, 丸め誤差を無視すれば厳密に元に戻るような公式である.
- どちらの公式も, 周期解をもつハミルトン系に適用した時に, エネルギーなどの保存量の誤差が一定の範囲から広がらないこと, また, 位置などの任意の量の誤差が時間の1次でしか増えないことが証明されている.

正準変換とは変換後の微分方程式もハミルトン系 (保存力によって運動が支配され, ポテンシャルが時間に陽には依存しない系) になるような座標変換である. このようなシンプレティック公式かつ対称型公式である数値積分公式を用いると誤差の少ない計算ができる.

2-4 ガウス・ルジャンドル法

一般の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (2-7)$$

(2-8)

に対して, 公式が

$$X_i = x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j h, X_j) \quad (2-9)$$

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i h, X_i) \quad (2-10)$$

となる数値解法を陰的ルンゲ・クッタ法と言う. x_n は $x(t_n)$ の近似解を表し, X_i は x_n から x_{n+1} を算出するための中間変数である. 通常ルンゲ・クッタ法の場合, 代入計算だけで中間変数が求められるのに対し, 陰的ルンゲ・クッタ法では X_i の値を求めるために X_j を用いなければならない. つまり, 未知変数の値を求めるために同じ未知変数を用いるような方程式を解かなければならない. 整数 s は段数, h はステップ幅, a_{ij}, b_i, c_i は係数パラメータであり, 表 2-1 のように表せる. ルジャンドル多項式を用いて算出される係数パラメータが表 2-2 となる陰的ルンゲ・クッタ法を4次のガウス・ルジャンドル法と言う. 式 (2-9), (2-10) と表 2-2 を用いると4次のガウス・

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss}
	b_1	b_2	\dots	b_s

表 2-2:

$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$
$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

表 2-3:

ルジャンドル法は次のような形になる.

$$k_1 = hf(x_n + a_{11}k_1 + a_{12}k_2) \quad (2-11)$$

$$k_2 = hf(x_n + a_{21}k_1 + a_{22}k_2) \quad (2-12)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(k_1 + k_2)}{2} \quad (2-13)$$

$$a_{11} = \frac{1}{4}, a_{12} = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{12},$$

$$a_{21} = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{12}, a_{22} = \frac{1}{4}$$

このようにガウス・ルジャンドル法を数値計算に用いる場合には k_1 の値を求めるために k_1 を用いなければならない. つまり, 未知変数の値を求めるために同じ未知変数を用いるような方程式を解かなければならない. 本研究で用いたコードはその方程式を直接反復によって解いている.

2-5 コードの信頼性

本研究で用いたコードはどれ程の精度で粒子の運動を計算するのか, またシンプレクティック公式と対称型公式の特性が出ているか確認する. そこで本研究で用いたコードと4次のルンゲ・クッタ法を用いたコードで冥王星-カロン系においてカロンの約6倍の公転周期を持つ衛星の軌道を計算し(図2-2,2-3), 保存量であるヤコ

ビ積分が計算ステップが多くなることによってどのように誤差が出るか比較した(図 2-4). この計算の計算ステップ数は 10^7 ステップである.

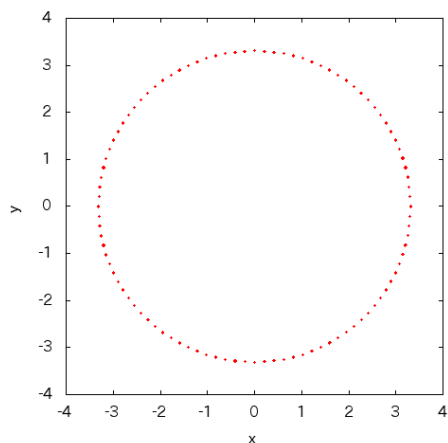


図 2-2: 4 次のガウス・ルジャンドル法を用いて計算したカロンの約 6 倍の公転周期を持つ衛星の軌道の各計算ステップでの位置である.

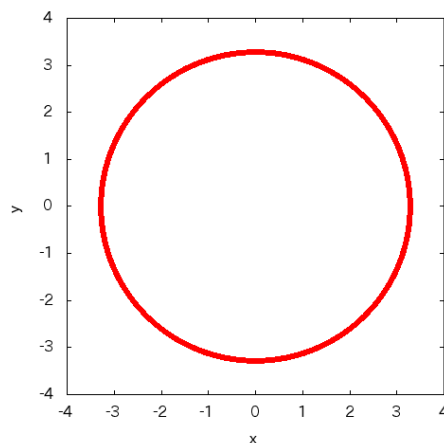


図 2-3: 4 次のルンゲ・クッタ法を用いて計算したカロンの約 6 倍の公転周期を持つ衛星の軌道の各計算ステップでの位置である.

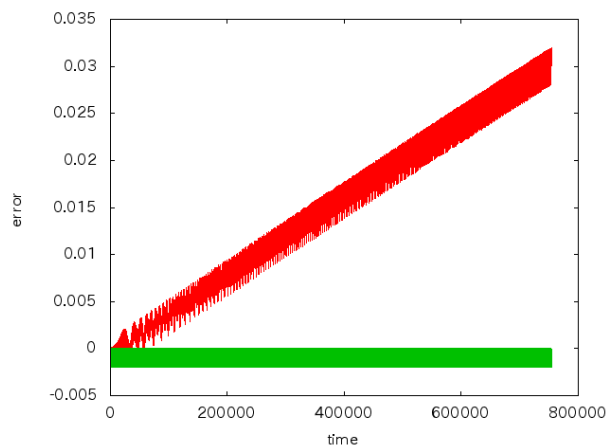


図 2-4: 赤は 4 次のルンゲ・クッタ法を用いたコード, 緑は本研究で用いたコードで計算して出たヤコビ積分の誤差. 縦軸は各計算ステップ時の値を用いたヤコビ積分を計算開始時の値を用いたヤコビ積分で割ったものを 1 から引いた値, 横軸は時間である.

図 2-4 より, 4 次のルンゲクッタ法を用いたコードを用いて計算した場合にはヤコビ積分が時間の 1 次で増加しているが, ガウス・ルジャンドル法を用いたコードは

ヤコビ積分がある一定の範囲より増加していない。これは本研究で用いたコードがシンプレクティック公式と対称型公式の特性を発揮していることを示す。

2-6 初期値

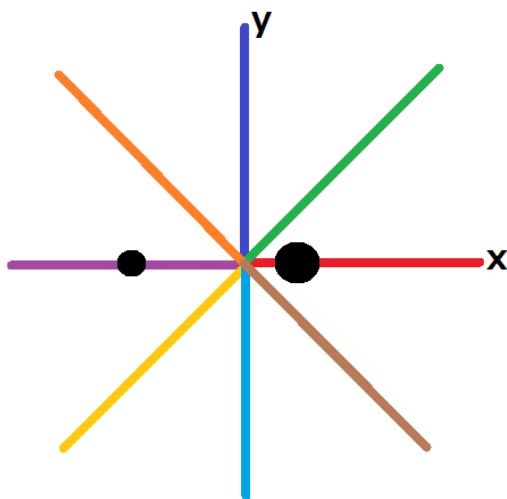


図 2-5: 相対位置の図. 相対位置は X 軸の正方向へ伸びる赤線と任意の色線との角度で表している. 黒丸の大きい方が冥王星で, 小さい方がカロンである.

初期値として初期位置と初速度を与える.

まず, 初期位置について述べる. 冥王星とその衛星系の起源から, 衛星の軌道面はほぼ揃っていると考え, 問題を簡単化するために軌道傾斜角はゼロとした. そして, 初期位置は共通重心からの距離と相対位置によって与えた. 共通重心からの距離は冥王星とカロンの距離を 1 としたとき, 約 1.48 ~ 1.70 の間で 21 通りとった. 相対位置は X 軸の正方向から 0 度, 45 度, 90 度, 135 度 ... と 45 度ごとにずらした 8 通りとした (図 2-5). よって, 計算した初期位置の数は $21 \times 8 = 168$ である

次に, 初速度について述べる. 初速度は初期位置において粒子が等速円運動するときの速度 (付録 B 参照) を 0.9 ~ 1.1 倍し, その間で 20001 通りを与えた. 計算した粒子の数はそれぞれの初期位置ごとにそれぞれ初速度を与えたので, $168 \times 20001 = 336$ 万 168 通りである.

2-7 軌道の安定性

安定な軌道の明確な定義はない。よく言われている安定な軌道の条件は長期的に軌道要素があまり変化しないことである。軌道要素は軌道の特徴づける量で、軌道長半径、軌道離心率、軌道傾斜角、昇交点経度、近点引数、近点通過時刻の6つである。本研究ではカロンの約3倍の公転周期を持つステュクスの軌道と軌道交差するものは不安定な軌道であるとした。なぜなら、軌道交差すると天体同士が近接遭遇する可能性があり、近接遭遇するとお互いの引力の相互作用によって軌道が大きく変わる可能性があるからである。

3 結果と考察

3-1 結果

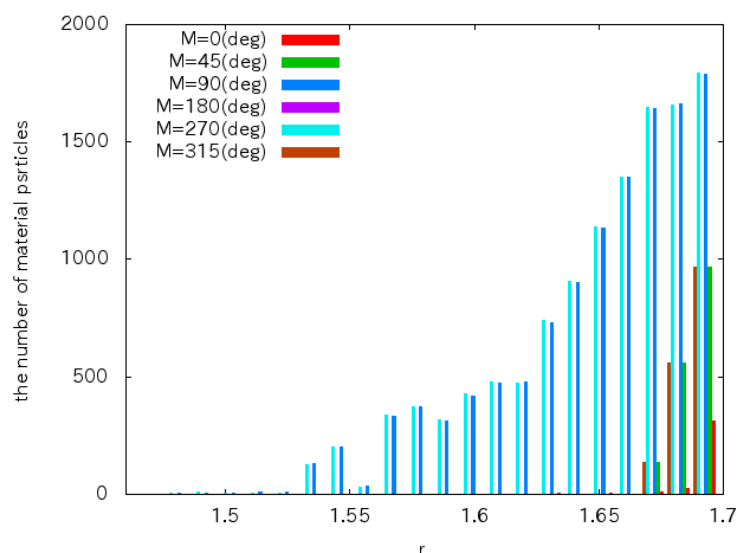


図 3-1: 横軸は初期の共通重心からの距離で, 縦軸は安定な粒子の数である. $M=135$ 度と 225 度は安定な粒子が無かったため図から省いた.

各初期値ごとの 10^6 ステップまで安定に存在した粒子の数を図 3-1 に示した. 相対位置 $M = 135$ 度と 225 度以外では安定な粒子が存在した. 図 3-1 から 3 つの傾向がわかる.

- 初期の共通重心からの距離が大きいくほど安定な粒子の数は多くなる.
- 初期の相対位置によって安定な粒子の数は大きく異なる.
- 安定な粒子の数は X 軸に対して線対称に近い.

計算した各粒子がステュクスと初めて軌道交差した時のステップ数は付録 C. 図録に載せている.

3-2 考察

まとめで挙げた3つ傾向の原因について考察する。まず、1つ目の共通重心からの距離が大きいほど安定な粒子の数は多くなるという傾向の原因を考える。粒子にかかる力は冥王星とカロンの万有引力のみとしているので、重力場がどのようなになっているか見る。図3-2は冥王星-カロン系における重力場である。図3-2を見ると共

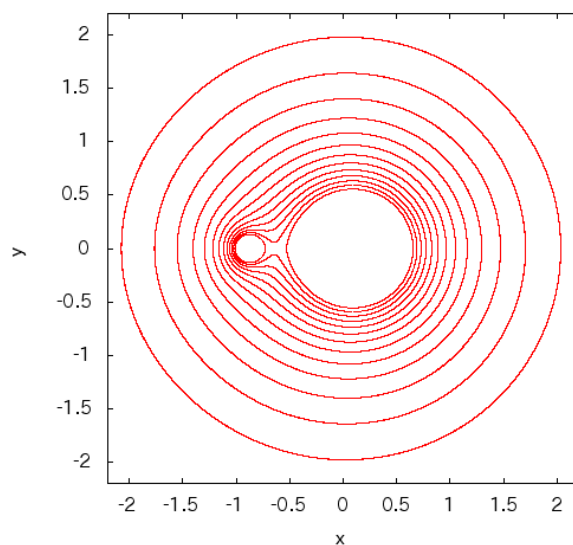


図 3-2: 冥王星-カロン系の重力場. 赤線は等重力ポテンシャル線である. 大きな円の空白の中心には冥王星が, 小さな円の空白の中心にはカロンが存在する.

通重心から離れるほど重力場の歪み(等重力ポテンシャル線が真円からどれほどずれているかという意味)は小さくなり, 等重力ポテンシャル線の形は円に近づいている。重力場が歪んでいると軌道は曲げられる可能性が高くなるので, 内側の重力場が歪んでいる場所では安定な軌道をとることができないからだと考えられる。

次に, 2つ目の初期の相対位置によって安定な粒子の数は大きく異なる原因を考える。これも図3-2を見てわかるとおり, 共通重心からの距離が同じ場所でも相対位置によって重力場の歪みの大きさが異なることによるものと考えられる。

最後に, 3つ目の安定な粒子の数は X 軸に対して線対称に近い原因を考える。これも図3-2を見てわかるとおり, 重力場が X 軸に対して線対称になっているからと考えられる。また, 安定な粒子の数が X 軸に対して完全に線対称になっていない原因は計算の誤差かもしれない。

安定な粒子がどのような公転周期を持つか見る. ここでの公転周期とは慣性系において粒子が冥王星とカロンの共通重心のまわりを1公転するのに要する時間のことである. 図3-3は安定な粒子の公転周期をプロットしたものである. 図3-3の $r = 1.62$ 上を見ると, 本研究の計算結果において公転周期がカロンの約2倍となる安定な粒子が存在していることがわかる. 図3-3から, 安定な粒子は公転周期が小さいものと公転周期が大きいものの2つのグループに分けられる. 公転周期が小さいものは図3-4のように共通重心のまわりを回っているのではなく, カロンか冥王星のまわりを回っている. 図3-4のような軌道は速度と加速度が急激に変化しており, 計算ステップ幅が公転周期に対して大きすぎるため今回定めたような計算ステップでは精度の良い計算はできない. また, 図3-4のように一度粒子が冥王星やカロンに非常に近づくと冥王星やカロンの潮汐力によって破壊されるというプロセスが働いたり, 重力ポテンシャルが冥王星とカロンの位置で無限大となるため円制限三体問題を用いた数値計算では粒子の運動を正確に計算できない. これらが理由で公転周期が小さいもののグループは安定な粒子かはわからない. よって, 安定な粒子の最小の公転周期はカロンの約1.5倍である.

次に, 公転周期が大きいもののグループを見る. 公転周期が大きいものは図3-5のように共通重心のまわりを回っている. X 軸方向の軌道半径が Y 軸方向より大きな楕円軌道となっている.

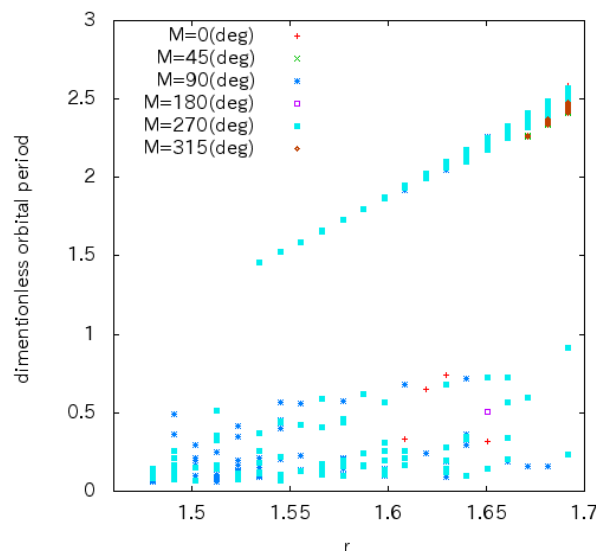


図3-3: 安定な粒子の公転周期. 縦軸はカロンの公転周期を1とした場合の粒子の公転周期で, 横軸は初期の共通重心からの距離である.

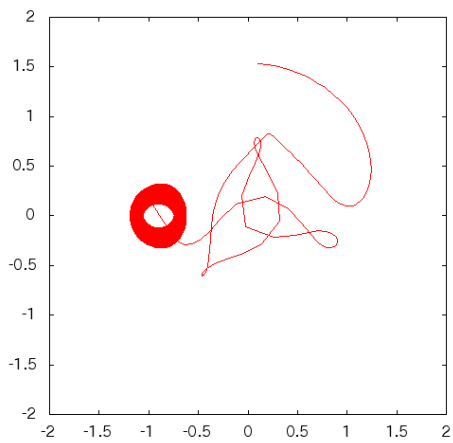


図 3-4: 公転周期が小さいグループの軌道の例.

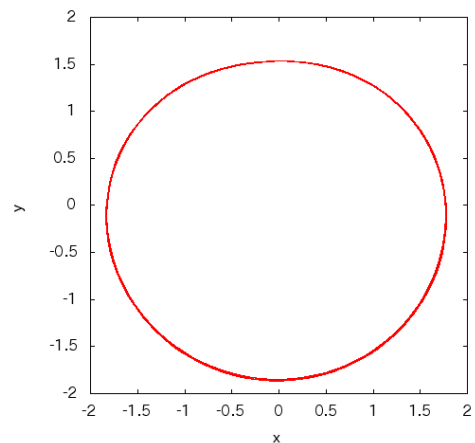


図 3-5: 公転周期が大きいグループの軌道の例.

4 まとめ

冥王星-カロン系において公転周期がカロンの約2倍となる衛星が存在している可能性を検討した。

計算の範囲内において、公転周期が公転周期がカロンの約2倍となる安定な軌道が存在した。また、安定な軌道が存在した最小の公転周期はカロンの約1.5倍である。

計算した期間は最大でも393年であり、衛星が太陽系の歴史を通じて安定に存在するかどうかについて確かなことは言えない。どれくらい長期にわたって安定であるかを知るためにはさらに長期の計算を行う必要がある。

謝辞

本研究を行うにあたり, ご指導いただきました指導教員である はしもと じょーじ 准教授に心より感謝致します. 同研究室の 石岡 翔 さんにはお忙しいにも関わらず, 研究を進める上で様々なアドバイスをいただいた事, ここでお礼申し上げます. 同じく, 同研究室の堀さん, 戸田さん, 鈴木さん, 矢野さんには様々な相談に乗っていただきありがとうございました.

参考文献

- 木下 宙, 1998: 天体と軌道の力学. 東京大学出版会, pp259.
- 牧野 淳一郎, 1999: パソコン物理実地指導. 共立出版, pp134.
- 三井 斌友 他, 2004: 微分方程式による計算科学入門. 共立出版, pp213.
- 堀 源一郎, 1988: 天体力学講義. 東京大学出版会, pp268.
- Ward, W. R., and Canup, R. M. 2006: Forced Resonant Migration of Pluto's Outer Satellites by Charon. *Science*, **313**, 1107-1109.
- Holman, M. J., and Wiegert, P. A. 1998: Long-Term Stability of Planets in Binary Systems. *The Astronomical Journal*, **117**, 621-628.
- Youdin, A. N., et al. 2012: Circumbinary Chaos: Using Pluto's Newest Moon to Constrain the Masses of Nix and Hydra. *The Astrophysical Journal*, **755**, 17.

A 円制限三体問題の運動方程式の導出

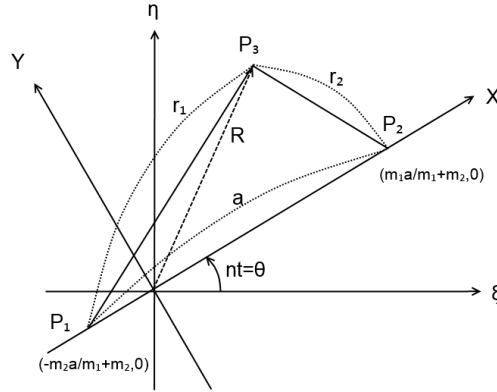


図 A-1: 共通重心を原点とする回転座標系.

質量が m_1, m_2 である 2 質点 P_1, P_2 の引力のもとで運動する質点 P_3 の慣性系での運動方程式は,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r_1^3} r_1 - \frac{Gm_2}{r_2^3} r_2 = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad (\text{A-1})$$

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} \quad (\text{A-2})$$

である. ここで質点 P_3 の質量 m_3 をゼロとする. 質点 P_1, P_2 の軌道面を基準面, P_1 と P_2 の重心 C を座標原点, 質点 P_3 の座標を (ξ, η, ζ) とする. この円運動の半径を a , 平均運動を n とするとケプラーの第三法則より,

$$n^2 a^3 = G(m_1 + m_2)$$

である. ζ の周りに角速度 n で回転し, P_1, P_2 を x 軸とする回転座標系 (X, Y, Z) で運動を記述する (図 A-1). ξ 軸と X 軸のなす角を $\theta = nt$ とすると座標 (ξ, η, ζ) と (X, Y, Z) の関係は

$$\xi = X \cos \theta - Y \sin \theta \quad (\text{A-3})$$

$$\eta = X \sin \theta + Y \cos \theta \quad (\text{A-4})$$

$$\zeta = Z \quad (\text{A-5})$$

である. X, Y, Z を ξ, η で表すと

$$X = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \quad (\text{A-6})$$

$$Y = -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta \quad (\text{A-7})$$

である. 式 (A-6) と (A-7) より ξ, η の時間微分を求める.

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{X} \cos \theta - \dot{Y} \sin \theta - X \dot{\theta} \sin \theta - Y \dot{\theta} \cos \theta \\ &= \dot{X} \cos \theta - \dot{Y} \sin \theta - n' X \sin \theta - n' Y \cos \theta\end{aligned}\quad (\text{A-8})$$

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \dot{X} \sin \theta + \dot{Y} \cos \theta + X \dot{\theta} \cos \theta - Y \dot{\theta} \sin \theta \\ &= \dot{X} \cos \theta + \dot{Y} \sin \theta + n' X \sin \theta - n' Y \cos \theta\end{aligned}\quad (\text{A-9})$$

さらに式 (A-8) と (A-9) を時間微分し加速度を求める.

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= \ddot{X} \cos \theta - \ddot{Y} \sin \theta - 2n\dot{X} \sin \theta - 2n\dot{Y} \cos \theta \\ &\quad - n^2 X \cos \theta + n^2 Y \sin \theta\end{aligned}\quad (\text{A-10})$$

$$\begin{aligned}\ddot{\eta} &= \ddot{X} \cos \theta + \ddot{Y} \sin \theta + 2n\dot{X} \cos \theta - 2n\dot{Y} \sin \theta \\ &\quad - n^2 X \sin \theta - n^2 Y \cos \theta\end{aligned}\quad (\text{A-11})$$

運動方程式 (A-1) の右辺に現れるポテンシャル U の ξ, η についての偏微分を式 (A-6), (A-7) を使って X, Y についての偏微分で書き直す.

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial X} \cos \theta - \frac{\partial U}{\partial Y} \sin \theta\quad (\text{A-12})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial U}{\partial Y} \cos \theta\quad (\text{A-13})$$

回転座標系の X 成分の運動方程式 (A-1) の左辺は

$$(\text{左辺}) = \ddot{\xi} \cos \theta + \ddot{\eta} \sin \theta$$

これに式 (A-10), (A-11) を代入すると

$$(\text{左辺}) = \ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2 X\quad (\text{A-14})$$

であり, 右辺は

$$(\text{右辺}) = -\frac{\partial U}{\partial \xi} \cos \theta - \frac{\partial U}{\partial \eta} \sin \theta$$

これに式 (A-12), (A-13) を代入すると

$$(\text{右辺}) = -\frac{\partial U}{\partial X}\quad (\text{A-15})$$

となる. よって回転座標系の X 成分の運動方程式は

$$\ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2 X = -\frac{\partial U}{\partial X}\quad (\text{A-16})$$

同様に, 回転座標系の Y 成分の運動方程式は

$$\ddot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y = -\frac{\partial U}{\partial Y} \quad (\text{A-17})$$

回転座標系の Z 成分の運動方程式は

$$\ddot{Z} = -\frac{\partial U}{\partial Z} \quad (\text{A-18})$$

である.

$$U = -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{a^3}{r_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{a^3}{r_2}\right)n^2 \quad (\text{A-19})$$

$$r_1 = \sqrt{\left(X + \frac{m_2}{m_1 + m_2}a\right)^2 + Y^2 + Z^2} \quad (\text{A-20})$$

$$r_2 = \sqrt{\left(X - \frac{m_1}{m_1 + m_2}a\right)^2 + Y^2 + Z^2} \quad (\text{A-21})$$

B 初期値の導出

B-1 初期位置

冥王星とカロンの共通重心をまわる質量ゼロの粒子の初期位置 (x_0, y_0) と初速度 (u_0, v_0) を導出する. 粒子の公転周期はカロンの公転周期 P_1 の n 倍とする. 冥王星からカロンまでの距離 R_1 はケプラーの第三法則より,

$$\frac{P_1^2}{R_1^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \quad (\text{B-1})$$

$$R_1 = \sqrt[3]{G(m_1 + m_2) \left(\frac{P_1}{2\pi}\right)^2} \quad (\text{B-2})$$

である. 上式の G は万有引力定数である. ここで, 冥王星の質量 m_1 とカロンの質量 m_2 が粒子の質量を無視できる程大きいとする. 冥王星とカロンの質量を足し合わせた質量を持つ天体が共通重心に存在するとすると, 共通重心から粒子までの距離 R は,

$$\frac{nP_1}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \quad (\text{B-3})$$

$$R = \sqrt[3]{G(m_1 + m_2) \left(\frac{nP_1}{2\pi}\right)^2} \quad (\text{B-4})$$

第三天体の回転座標系での計算開始時の位置 x_0, y_0 は, また φ を回転座標の回転角とすると,

$$x_0 = R \cos \varphi \quad (\text{B-5})$$

$$y_0 = R \sin \varphi \quad (\text{B-6})$$

である. これを冥王星とカロンの距離 R_1 で無次元化すると,

$$x_0 = \frac{R \cos \varphi}{R_1} = n^{\frac{2}{3}} \cos \varphi \quad (\text{B-7})$$

$$y_0 = \frac{R \sin \varphi}{R_1} = n^{\frac{2}{3}} \sin \varphi \quad (\text{B-8})$$

B-2 初速度

次に, 粒子が回転座標系で等速円運動するときの初速度 u_0, v_0 を導出する. 時刻 t における粒子の位置は,

$$x = R \cos \varphi \quad (\text{B-9})$$

$$y = R \sin \varphi \quad (\text{B-10})$$

ここで, R は時間によらず一定である. また時間と共に変化する. 上式を時間で微分して速度成分を求める.

$$u = -R\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (\text{B-11})$$

$$v = R\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (\text{B-12})$$

ここで回転角 φ を慣性系での粒子の角速度 ω で表すと $\varphi = \omega t$ であり, $\dot{\varphi} = \omega$ が成り立つ. よって上式は,

$$u = -\omega y \quad (\text{B-13})$$

$$v = \omega x \quad (\text{B-14})$$

であり, 初速度は

$$u_0 = -\omega y_0 \quad (\text{B-15})$$

$$v_0 = \omega x_0 \quad (\text{B-16})$$

となる. そして, u_0, v_0 を回転座標の回転角速度 ω_1 で無次元化すると,

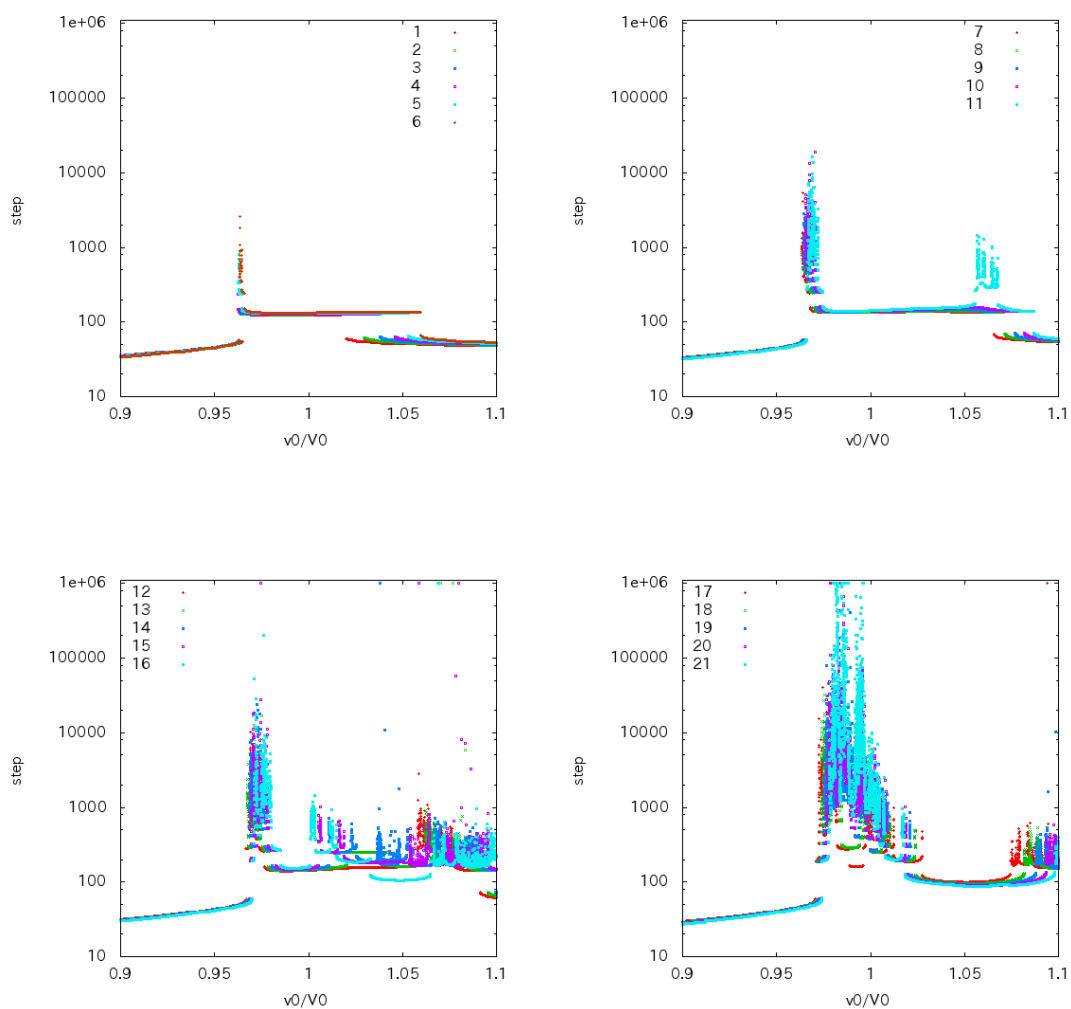
$$u_0 = -\frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} y_0 = -\frac{n-1}{n} y_0 \quad (\text{B-17})$$

$$v_0 = \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} x_0 = \frac{n-1}{n} x_0 \quad (\text{B-18})$$

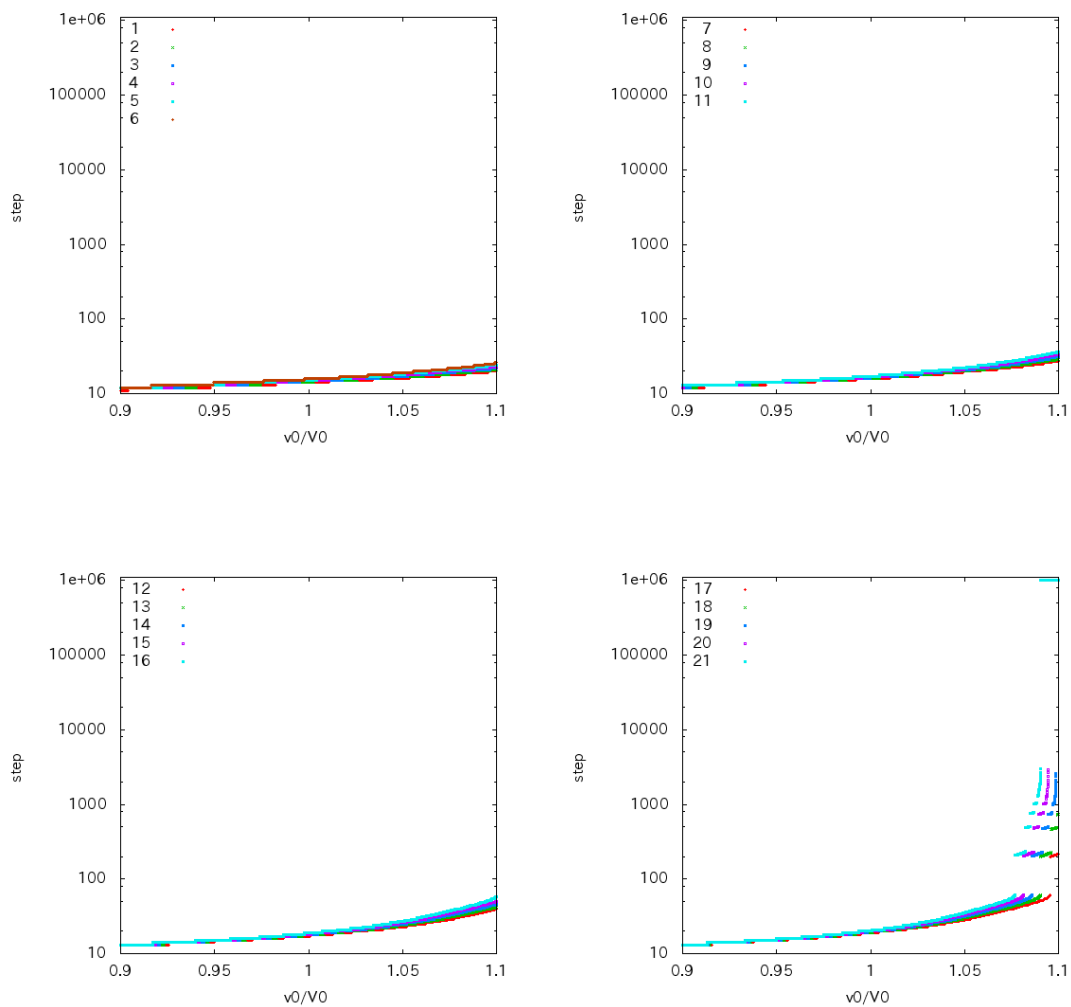
である.

C 図録

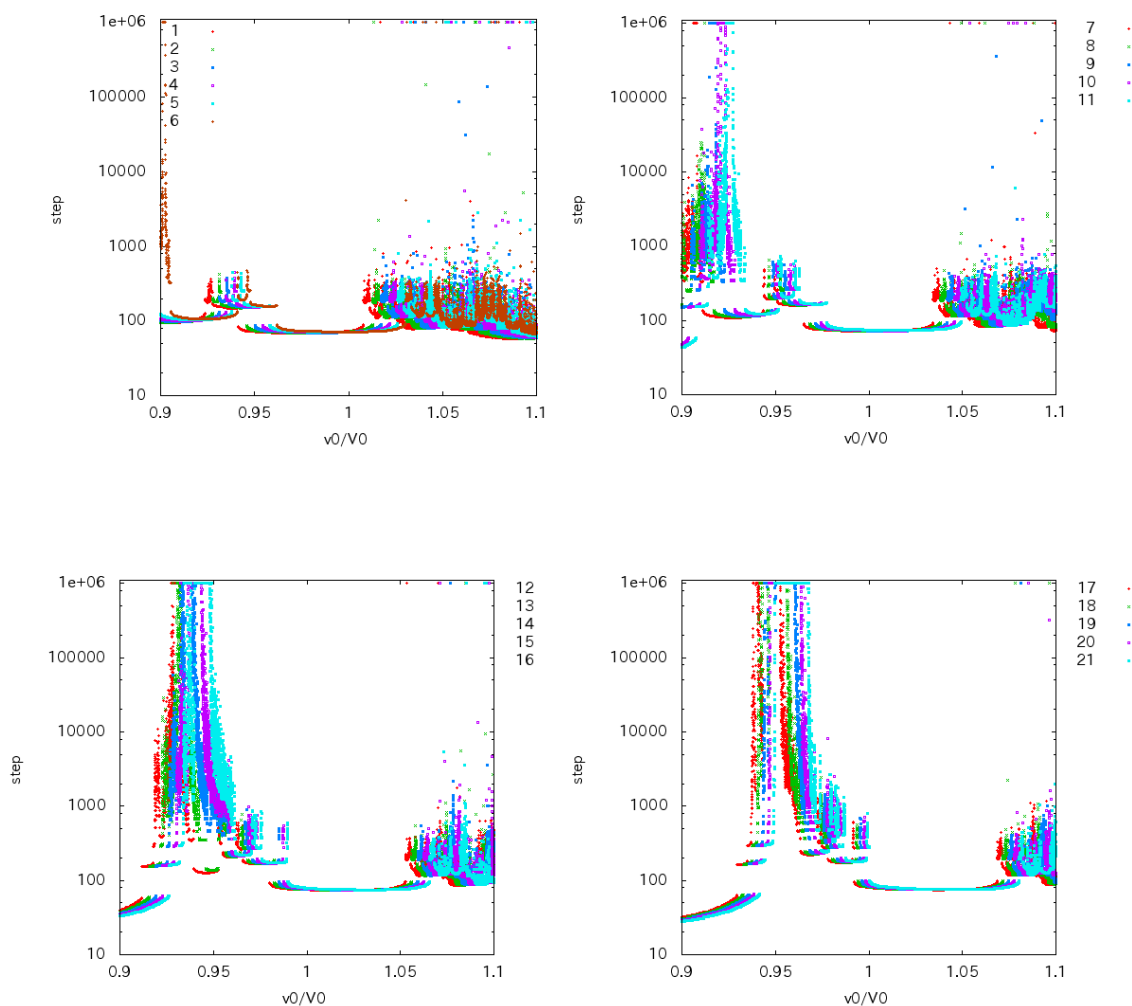
以下の図は各平均近点離角 M における共通重心からの距離 21 通りごとの不安定になった時のステップ数である。

C-1 $M=0$ 度

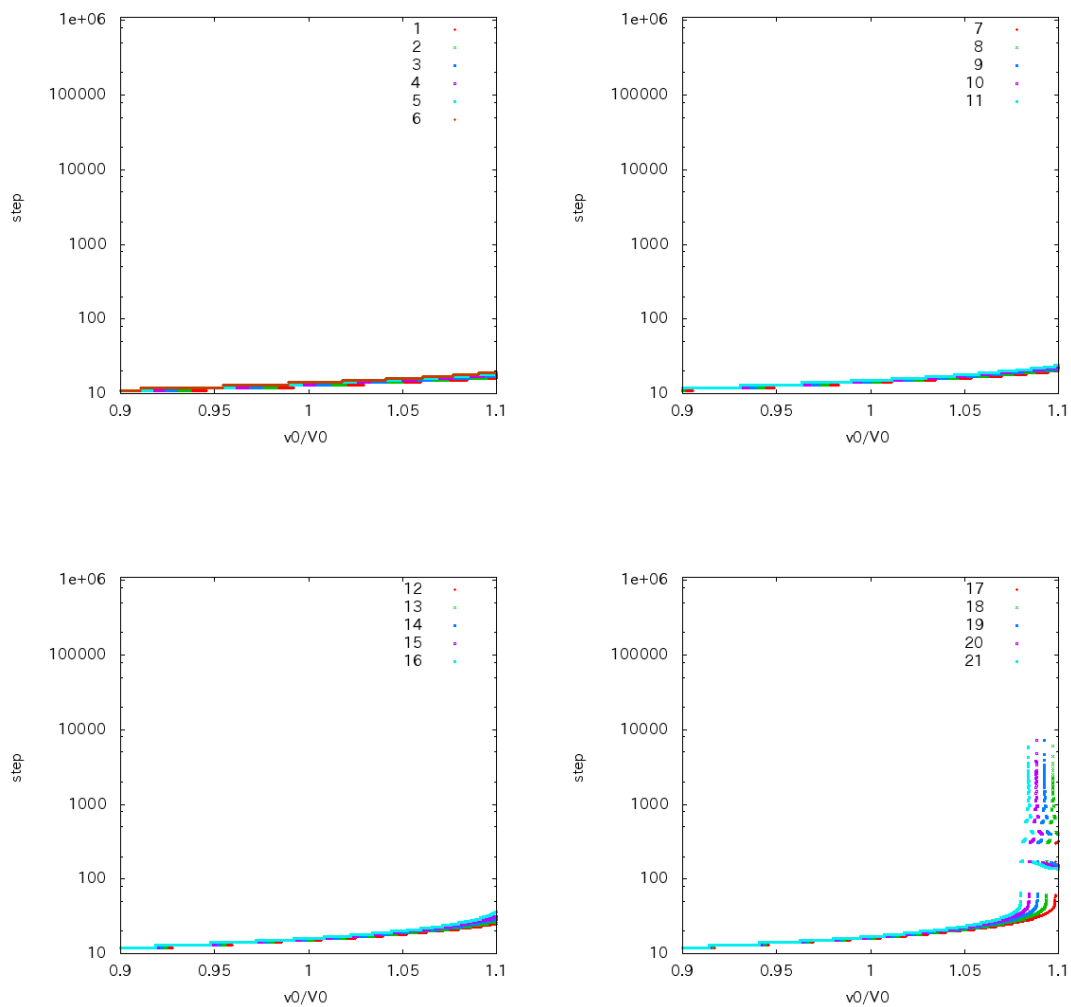
C-2 M=45度



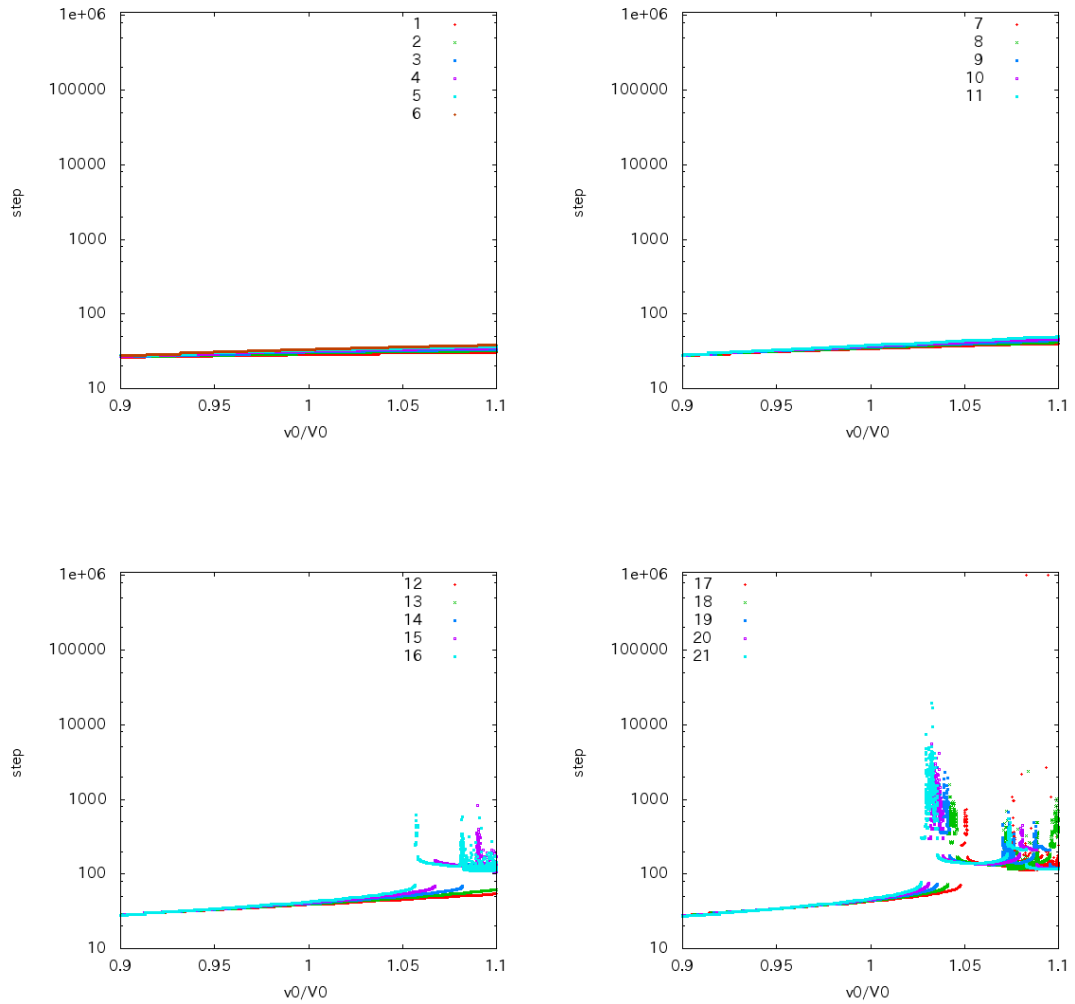
C-3 M=90度



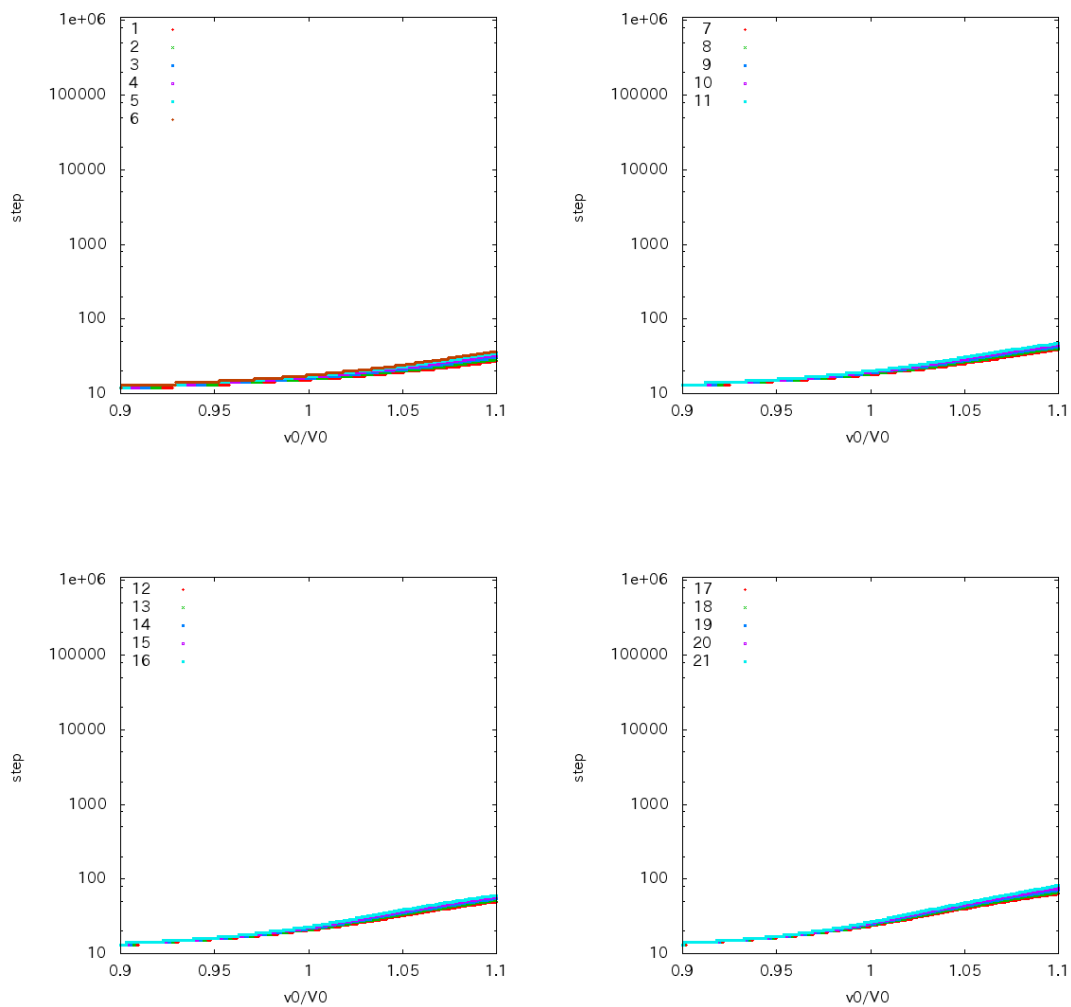
C-4 M=135 度



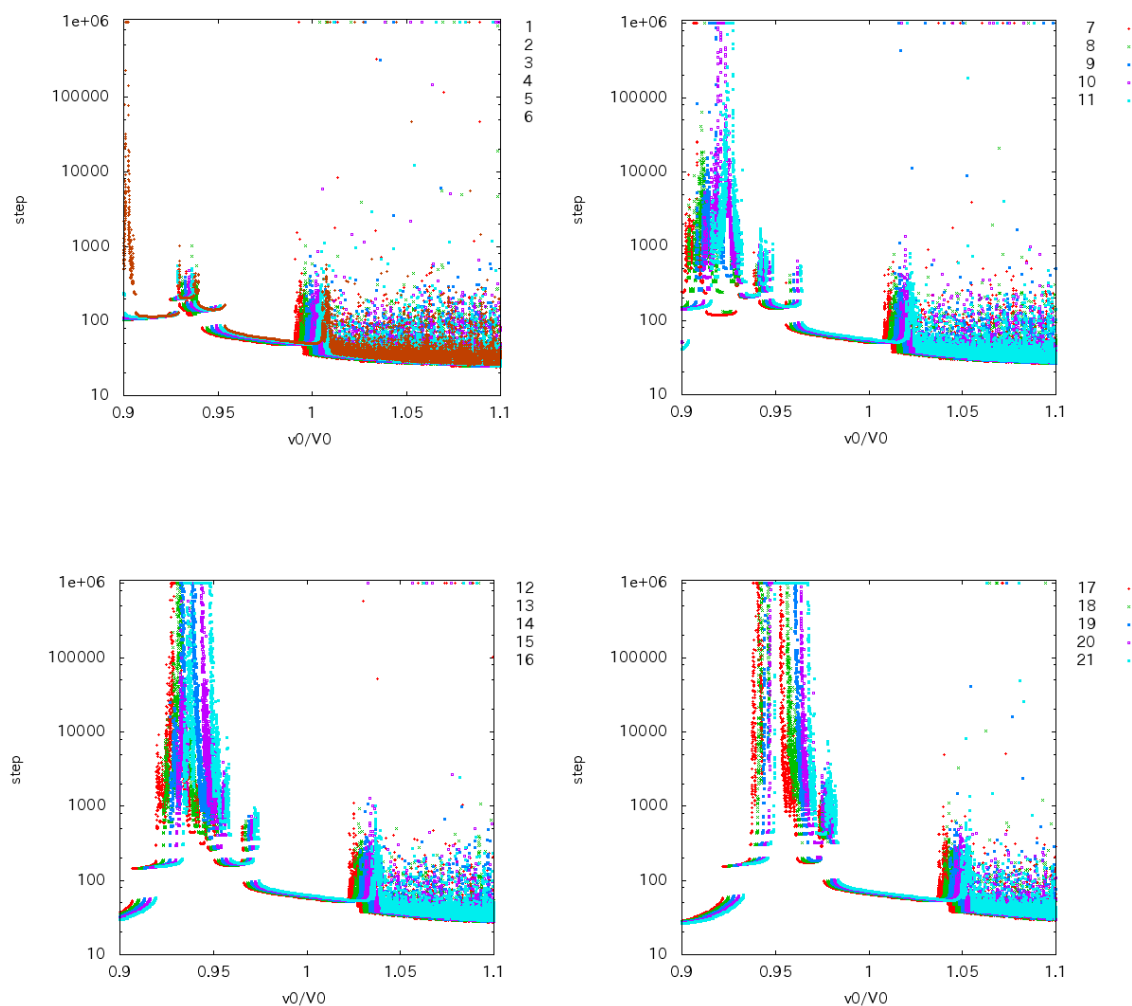
C-5 M=180度



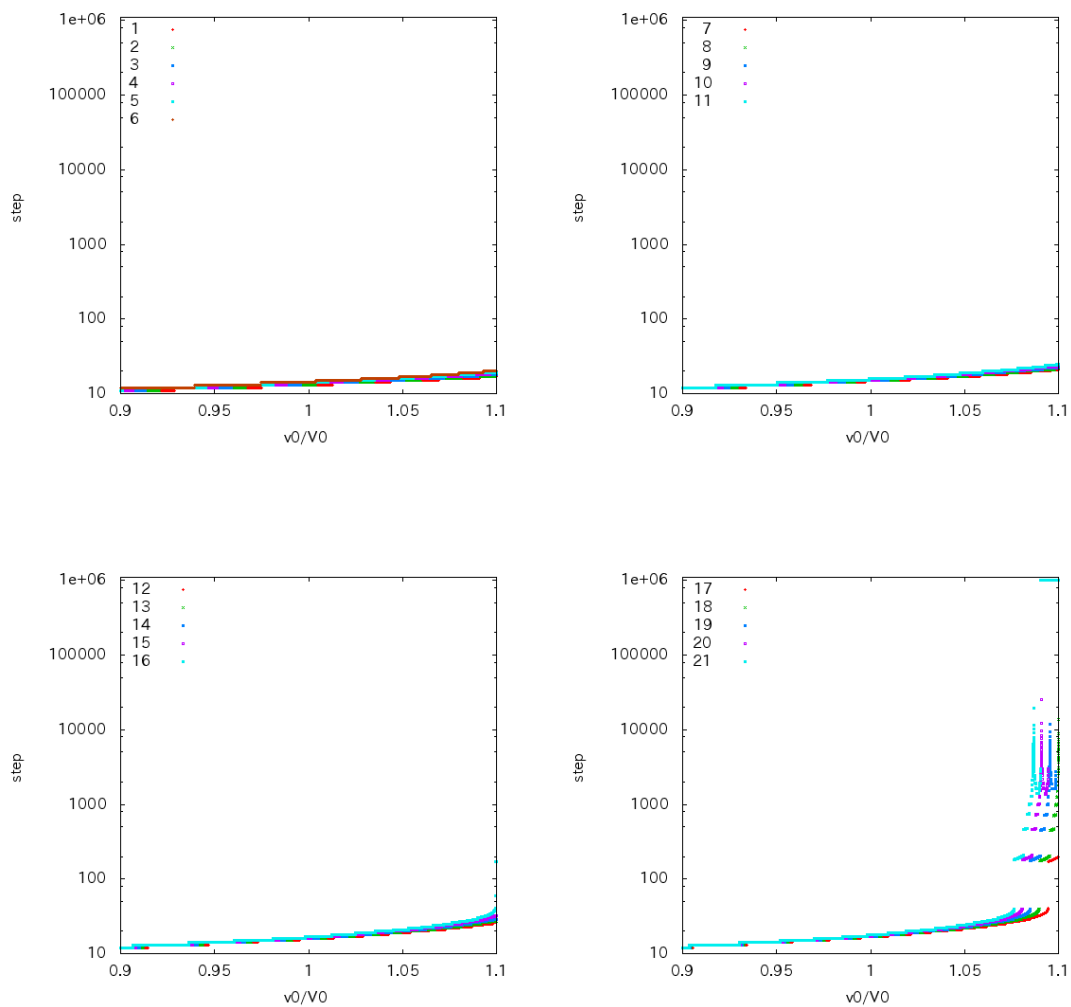
C-6 M=225 度



C-7 M=270度



C-8 M=315度



D プログラム

```
1  #include<stdio.h>
2  #include<math.h>
3  #define mu 0.1052378003
4  #define PI 2.0*asin(1.0)
5  double fu(double x,double y,double z,double u,double v);
6  double fv(double x,double y,double z,double u,double v);
7  double fw(double x,double y,double z);
8  void gauss(double &x, double &y,double &z, double &u, double &v, double &w, d
9  int main(void)
10 {
11     FILE *fp;
12     FILE *hp;
13     char filename[30];
14     char filename2[30];
15     int p;
16     for(p=0;p<21;p++)
17     {
18         double OP = 2.2-0.02*double(p);
19         sprintf(filename,"10^6_a_case%.2f.dat",OP);
20         fp = fopen(filename,"w+");
21         sprintf(filename2,"10^6_a_case%.2f_season.dat",OP);
22         hp = fopen(filename2,"w+");
23         int seasonsuu = 0;
```

```
24     int saidaistep = 0;
25     double baai;
26     for(int k=0;k<20001;k++)
27     {
28         double kizami = 0.9+0.00001*double(k);
29         double x = pow(OP,2.0/3.0);
30         double y = 0.0;
31         double z = 0.0;
32         double u = 0.0;
33         double v = -((OP-1.0)*x/baisu)*kizami;
34         double w = 0.0;
35         double t = 0.0;
36         double dt = 2.0*OP*PI/((OP-1)*100);
37         int syuusuu = -1;
38         double yb,ya;
39         double r;
40         double jougen = 42000/19571;
41         for (int i=0;i<1000000;i++)
42         {
43             yb = y;
44             gauss(x,y,z,u,v,w,t,dt);
45             ya = y;
46             if(yb >= 0.0 && ya <= 0.0)
47             {
48                 syuusuu++;
49             }
```

```
50  r = pow(x*x+y*y,0.5);
51  if(r >= jougen)
52  {
53      fprintf(fp,"%0.7f %d %d\n", kizami, i+1, syuusuu);
54      if(saidaistep < i+1)
55      {
56          saidaistep = i+1;
57          baai = kizami;
58      }
59      break;
60  }
61  if(i == 999999)
62  {
63      fprintf(fp,"%0.7f %d %d\n", kizami, i+1, syuusuu);
64      fprintf(hp,"%0.7f %d %0.16f %0.16f %0.16f %0.16f %d\n", kizami, i+1, x, y, u, v,
65      seasonsuu++);
66      saidaistep = i+1;
67      baai = kizami;
68  }
69  t+=dt;
70      }
71      }
72  fclose(hp);
73  fclose(fp);
74  }
```

```
75     return 0;
76 }
77 double fu(double x,double y,double z,double u,double v)
78 {
79     double R1,R2;
80     R1 = sqrt((x+(1-mu))*(x+(1-mu))+y*y+z*z);
81     R2 = sqrt((x-mu)*(x-mu)+y*y+z*z);
82     return (- mu*(x+(1-mu))/pow(R1,3.0)
83            - (1-mu)*(x-mu)/pow(R2,3.0)
84            + x + 2*v);
85 }
86 double fv(double x,double y,double z,double u,double v)
87 {
88     double R1,R2;
89     R1 = sqrt((x+(1-mu))*(x+(1-mu))+y*y+z*z);
90     R2 = sqrt((x-mu)*(x-mu)+y*y+z*z);
91     return (- mu*y/pow(R1,3.0)
92            - (1-mu)*y/pow(R2,3.0)
93            + y - 2*u);
94 }
95 double fw(double x,double y,double z)
96 {
97     double R1,R2;
98     R1 = sqrt((x+(1-mu))*(x+(1-mu))+y*y+z*z);
99     R2 = sqrt((x-mu)*(x-mu)+y*y+z*z);
```

```
100     return (- mu*z/pow(R1,3.0)
101             - (1-mu)*z/pow(R2,3.0));
102 }
103 void gauss(double &x, double &y, double &z, double &u, double &v, double &w, double &d)
104 {
105     const static double a11 = 0.25;
106     const static double a12 = 0.25-sqrt(3)/6;
107     const static double a21 = 0.25+sqrt(3)/6;
108     const static double a22 = 0.25;
109     double u1,u2,v1,v2,w1,w2;
110     double f1,f2,f3,f4,f5,f6;
111     u1=u2=u;
112     v1=v2=v;
113     w1=w2=w;
114     f1=f2=fu(x,y,z,u,v);
115     f3=f4=fv(x,y,z,u,v);
116     f5=f6=fw(x,y,z);
117     for(int l=0;l<100;l++)
118     {
119         double xg1 = x +(a11*u1+a12*u2)*dt;
120         double xg2 = x +(a21*u1+a22*u2)*dt;
121         double yg1 = y +(a11*v1+a12*v2)*dt;
122         double yg2 = y +(a21*v1+a22*v2)*dt;
123         double zg1 = z +(a11*w1+a12*w2)*dt;
124         double zg2 = z +(a21*w1+a22*w2)*dt;
```

```
125     double ug1 = u +(a11*f1+a12*f2)*dt;
126     double ug2 = u +(a21*f1+a22*f2)*dt;
127     double vg1 = v +(a11*f3+a12*f4)*dt;
128     double vg2 = v +(a21*f3+a22*f4)*dt;
129     double wg1 = w +(a11*f5+a12*f6)*dt;
130     double wg2 = w +(a21*f5+a22*f6)*dt;
131     u1 = ug1;
132     u2 = ug2;
133     v1 = vg1;
134     v2 = vg2;
135     w1 = wg1;
136     w2 = wg2;
137     f1 = fu(xg1,yg1,zg1,ug1,vg1);
138     f2 = fu(xg2,yg2,zg2,ug2,vg2);
139     f3 = fv(xg1,yg1,zg1,ug1,vg1);
140     f4 = fv(xg2,yg2,zg2,ug2,vg2);
141     f5 = fw(xg1,yg1,zg1);
142     f6 = fw(xg2,yg2,zg2);
143     }
144     x = x+(u1+u2)*0.5*dt;
145     y = y+(v1+v2)*0.5*dt;
146     z = z+(w1+w2)*0.5*dt;
147     u = u+(f1+f2)*0.5*dt;
148     v = v+(f3+f4)*0.5*dt;
149     w = w+(f5+f6)*0.5*dt;
```


150 }