常微分方程式の数値解法

はしもとじょーじ　（岡山大学理学部地球科学科）

常微分方程式の数値解法

常微分方程式の初期値問題の数値解法を考える．後にある例題で示すように、高階(n階)の常微分方程式はn組の連立１階常微分方程式に帰着させることができるので、高階の常微分方程式は１階の常微分方程式の数値解法を用いて数値解を求めることができる．

次のような初期値問題を考える．

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$
$$x = x_0 \qquad \text{at} \ \ t = 0$$

被積分関数 $f(t,x)$ が x に依存しない t だけの関数であれば，台形公式を使って積分することができる．しかし上の式のように x にも依存している場合には，各 t における x の値を知る必要があるため，台形公式を使うことはできない．

オイラー法

ある時刻 t_i において x_i であるとすると、時刻 t_i における dx/dt を計算することができる．オイラー法と呼ばれる解法では、時刻 t_i から微小時間 Δt 後の時刻 $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ における x の近似値 x_{i+1} を次のように求める．

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dx}{dt'} dt' \\
&= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t',x) dt' \\
&\approx x_i + f(t_i,x_i)\cdot(t_{i+1} - t_i) \\
&= x_i + f(t_i,x_i)\cdot \Delta t
\end{aligned}$$

この式の２行目から３行目へは，区間 $[t_i,t_{i+1}]$ において $f(t,x)$ の値は $f(t_i,x_i)$ という一定の値で近似できるとして変形をおこなっている．

ここで得られた近似値 x_{i+1} を使えば、またそこから微小時間後の近似値 x_{i+2} を同様にして計算することができる．すなわちオイラー法を繰り返し使うことで、任意の時刻における x の近似値を得ることができる．

例題．自由落下(高階の常微分方程式)

重力場中を自由落下する物体の運動は、抵抗などが無視できるとき

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

で表される．ここで z は物体の位置(高さ)、t は時間、g は重力加速度である．

解）この２階の常微分方程式は、物体の鉛直速度 $w = dz/dt$ を使うと

$$\frac{dz}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = -g$$

という２本の１階の常微分方程式になる．位置と速度について初期値が与えられれば上の式からそれぞれの時間微分を計算することができ，オイラー法を使えば微小時間後の位置と速度それぞれの近似値を得ることができる．

ルンゲ＝クッタ法

実際に常微分方程式を数値的に解くとき、オイラー法が使われることはまずない．計算精度やその他のことを考えると、他の方法を使う方が良いと知られているからである．それではどの数値解法を使えばよいのかというと、それは簡単には答えられない．解こうとしている問題の性質に合わせて、それに適した数値解法を選択する必要がある．

といいながらも、定番の数値解法というものはある．オイラー法を発展させた４次のルンゲ＝クッタ法はそんな定番のひとつである．オイラー法は、時刻 t_i から t_{i+1} の間の dx/dt を、時刻 t_i での dx/dt で近似する．しかし実際には時刻 t_{i+1} における dx/dt は時刻 t_i での dx/dt と同じとは限らない．４次のルンゲ＝クッタ法は以下の方法によって時刻 t_i から t_{i+1} の間の dx/dt を推定することで、４次の精度をもった近似値を計算する(ちなみにオイラー法は１次の精度)．

$$x_{i+1} \approx x_i + \left(\frac{f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4}{6}\right) \cdot \Delta t$$

$$f_1 = f(t_i, x_i)$$

$$f_2 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{f_1 \cdot \Delta t}{2}\right)$$

$$f_3 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{f_2 \cdot \Delta t}{2}\right)$$
$$f_4 = f\left(t_i + \Delta t, x_i + f_3 \cdot \Delta t\right)$$

数値解の誤差(解析解と数値解の差)は一般に時間の刻み幅 Δt を小さくするほどに小さくなる．しかし計算量は Δt に反比例して増大するため、Δt を小さくすることには限界がある(他にも丸め誤差の問題などがあるので Δt をただ小さくすればよいというものではない)．したがって要求される精度を達成するのに必要十分な大きさである Δt を使う必要がある．また、解析解は得られていないのが通常であるから、正解を知らない状況で数値解に含まれる誤差を推定する方法が必要とされる(これは台形公式を使った数値積分でも同じこと)．常微分方程式の数値解法における精度の話、最適な Δt の決定方法、その他の数値解法などに興味を持った人は、参考文献１の１６章を読んでみよう．

課題１－３．１次元の常微分方程式(伊理・藤野、1985)

次の常微分方程式を

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2$$

初期条件 $x(t=0)=0$ のもとに解いてみる．ちなみに解析解は $x(t) = \tanh t$ である．

時間の刻み幅 Δt を変えた計算をやってみて、数値解と解析解との差がどのように変わるか調べてみる．

課題１－４．自由落下(1)

重力場中を自由落下する物体の運動は、抵抗などが無視できるとき

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

で表される．ここで z は物体の位置(高さ)、t は時間、g は重力加速度である．物体の軌跡について数値解と解析解を求めて比較してみる．

課題１－５．自由落下(2)

速度に比例した抵抗が働くとき、重力場中を自由落下する物体の運動は

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - kw$$

で表される．物体の軌跡について数値解と解析解を求めて比較してみる．また、抵抗が速度の２乗に比例する場合についても同様に比較してみる．

課題１－６．慣性振動

気圧の変化および平均流の存在しないとき、流体粒子の水平方向の運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu$$

と書ける．ここで f はコリオリパラメタである．f を一定とするとき、周期 $2\pi/f$ で振動する解が存在する．

時刻 $t = 0$ において $x = 0, y = 0$ にある流体粒子の速度が $u = U, v = 0$ であったとき、この流体粒子の軌跡を計算してみる．また、コリオリパラメタが $f = f_0 + \beta y$ で表される場合についても同様に流体粒子の軌跡を計算してみる．

課題１－７．ローレンツの大気大循環モデル

ローレンツは大気大循環の本質を組み込んだ以下のようなモデルを作成した．

$$\frac{dX}{dt} = -Y^2 - Z^2 - aX - af$$
$$\frac{dY}{dt} = XY - bXZ - Y + g$$
$$\frac{dZ}{dt} = bXY + XZ - Z$$

それぞれの変数およびパラメタが表す意味については、岩波講座地球惑星科学11気候変動論のp.241−を参考にしてほしい．このモデルの自由度は３であるにすぎないが、パラメタによってはカオス的な振る舞いをすることが知られている．

適当なパラメタについて系の時間発展を計算し、各変数の時系列図などを描いてみる．あるいはポアンカレ断面図などを描いてみる．さらには時系列のスペクトル解析をおこなってパワースペクトル密度関数を求めてみる．

参考文献

1． Press et al. (1992) Numerical Recipes in FORTRAN, 2nd ed., Cambridge Univ. Press.
2． 伊理正夫・藤野和建 (1985) 数値計算の常識、共立出版