最低限の
数値計算入門（２）

はしもとじょーじ

数値積分：台形公式

計算機を使って定積分の値を見積もる(数値積分)

数値積分で求められるのはあくまで近似解

数値積分の出番

被積分関数が複雑な形をしていてその原始関数を求めることが困難であるような場合

台形公式

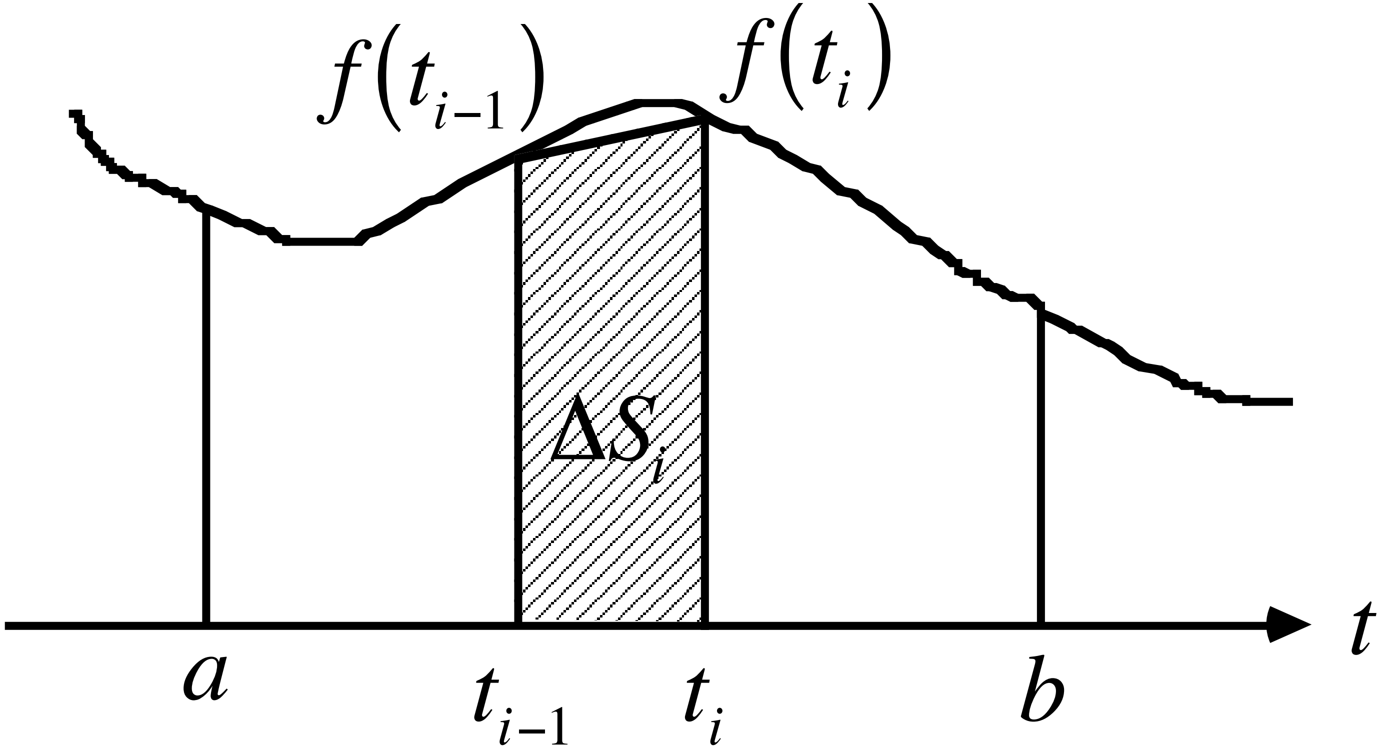
定積分 $I=\int_a^b f(t)dt$ **を考える**

$f(t)$ は区間 $[a,b]$ において連続で、その値はいたるところで求めることができるものとする

台形公式

区間 $[a,b]$ を多数の微小区間に分割し、それぞれの区間内において $f(t)$ を直線で近似して積分を見積もる

台形公式



区間 $[t_{i-1}, t_i]$ の台形の面積は

$$\Delta S_i = \frac{f(t_{i-1}) + f(t_i)}{2}(t_i - t_{i-1})$$

台形公式

区間 $[a,b]$ を n 等分して各微小区間の台形の面積を足し算すると

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

$$= \frac{f(t_0)+f(t_1)}{2}\Delta t + \frac{f(t_1)+f(t_2)}{2}\Delta t + \frac{f(t_2)+f(t_3)}{2}\Delta t$$

$$+\cdots+\frac{f(t_{n-2})+f(t_{n-1})}{2}\Delta t + \frac{f(t_{n-1})+f(t_n)}{2}\Delta t$$

台形公式

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

$$= \left(\frac{f(t_0)}{2} + f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_{n-1}) + \frac{f(t_n)}{2} \right) \cdot \Delta t$$

$$= \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + \frac{f(b)}{2} \right) \cdot \Delta t$$

ここで $\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$

台形公式

$$\int_a^b f(t)dt \approx \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \right) \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

理屈の上では，区間の分割数を増やしていくほどに、よりよい近似値が得られる.

考える必要のあること

- 計算時間
- 丸め誤差
- 誤差の見積もり