最低限の
数値計算入門（２）

はしもとじょーじ

常微分方程式の数値解法

次のような初期値問題を考える

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

$$x = x_0 \quad \text{at} \;\; t = 0$$

被積分関数にあたる $f(x,t)$ が t だけでなく x にも依存しているので、台形公式は使えない

オイラー法

時刻 t_i から微小時間 Δt 後の時刻 $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ における x の近似値 x_{i+1} を次のように求める

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dx}{dt'} dt' \\
&= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t', x) dt' \\
&\approx x_i + f(t_i, x_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) \\
&= x_i + f(t_i, x_i) \cdot \Delta t
\end{aligned}
$$

オイラー法と微分の定義

微分の定義

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x\left(t_0 + \Delta t\right) - x\left(t_0\right)}{\left(t_0 + \Delta t\right) - t_0}$$

有限の Δt では

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} \approx \frac{x\left(t_0 + \Delta t\right) - x\left(t_0\right)}{\Delta t}$$

$$x\left(t_0 + \Delta t\right) \approx x\left(t_0\right) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} \cdot \Delta t$$

オイラー法とテイラー展開

$t = t_0$ のまわりでテイラー展開して一次の項まで残す

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + x'(t_0) \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} x''(t_0) \cdot \Delta t^2 + \cdots$$

$$\approx x(t_0) + x'(t_0) \cdot \Delta t$$

$$= x(t_0) + f(t_0) \cdot \Delta t$$

Δt が十分に小さければ、Δt の高次の項は十分に小さくなるので無視できる

$t = t_0$ での x が既知であれば、$t = t_0 + \Delta t$ における x の近似値を上の式から求めることができる

例：時間発展問題

速度 v で運動する物体の位置 x

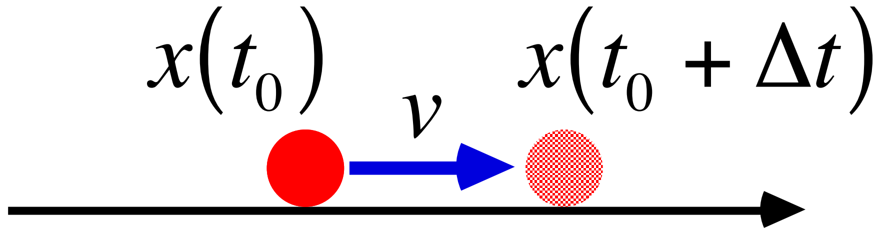
物体の位置を表す常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = v$$

時刻 $t = t_0$ で $x = x_0$ の位置にあったとすると

$$x(t_0 + \Delta t) \approx x(t_0) + x'(t_0) \cdot \Delta t$$

$$= x_0 + v \cdot \Delta t$$



高階の常微分方程式

n 階の常微分方程式は、n 組の連立１階常微分方程式に帰着させることができる

$\rightarrow$　１階の常微分方程式の数値解法を用いて数値解を求めることができる

例：自由落下

重力場中を自由落下する物体の運動(抵抗などが無視できるとき)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g$$

物体の鉛直速度 $w = dz/dt$ を使えば

$$\frac{dz}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = -g$$

例：自由落下

時刻 $t = t_0$ で $z = z_0$，$w = w_0$ であったとすると，

$$z(t_0 + \Delta t) \approx z(t_0) + \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} \cdot \Delta t$$

$$= z_0 + w(t_0) \cdot \Delta t$$

$$w(t_0 + \Delta t) \approx w(t_0) + \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=t_0} \cdot \Delta t$$

$$= w_0 + g \cdot \Delta t$$